# Anwendungen

$f'(x) =$ Steigung der Tangente

## Monotonie

Eine Funktion $f$ heißt auf dem Intervall $[a,b]$

- monoton wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$

für alle $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $x_1 < x_2$.

Sei $f$ eine differenzierbare Funktion.

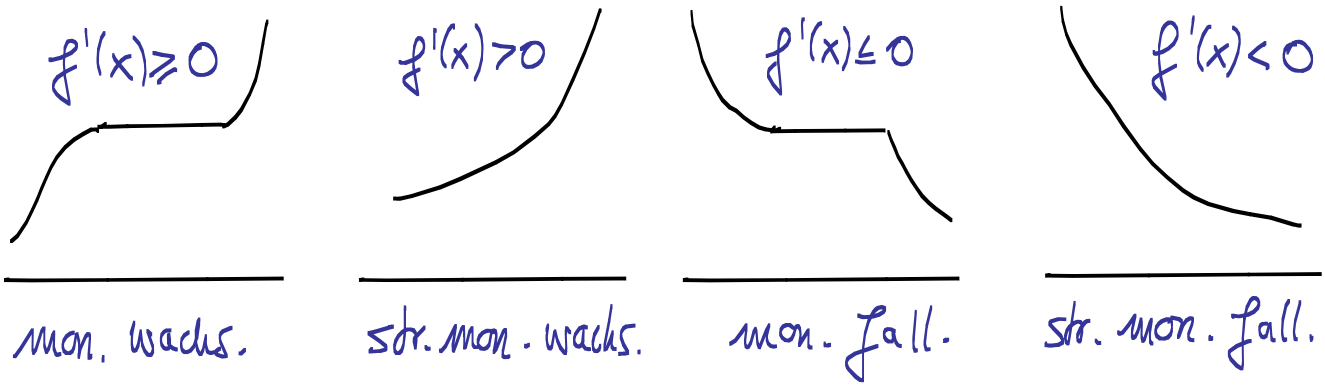
Dann gilt:

$f$ auf $[a,b]$ monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f'(x) \geq 0 \;\forall x \in [a,b]$

$f$ auf $[a,b]$ streng mon. wachsend $\Leftrightarrow$ $f'(x) > 0 \;\forall x \in [a,b]$

$f$ auf $[a,b]$ monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f'(x) \leq 0 \;\forall x \in [a,b]$

$f$ auf $[a,b]$ streng mon. fallend $\Leftrightarrow$ $f'(x) < 0 \;\forall x \in [a,b]$



Beispiel:

$f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$f'(x) > 0 \ \forall\ x \in (0, \infty)$, d.h. $f$ auf $(0,\infty)$ streng mon. wachsend

$f'(x) < 0 \ \forall\ x \in (-\infty, 0)$, d.h. $f$ auf $(-\infty, 0)$ streng mon. fallend

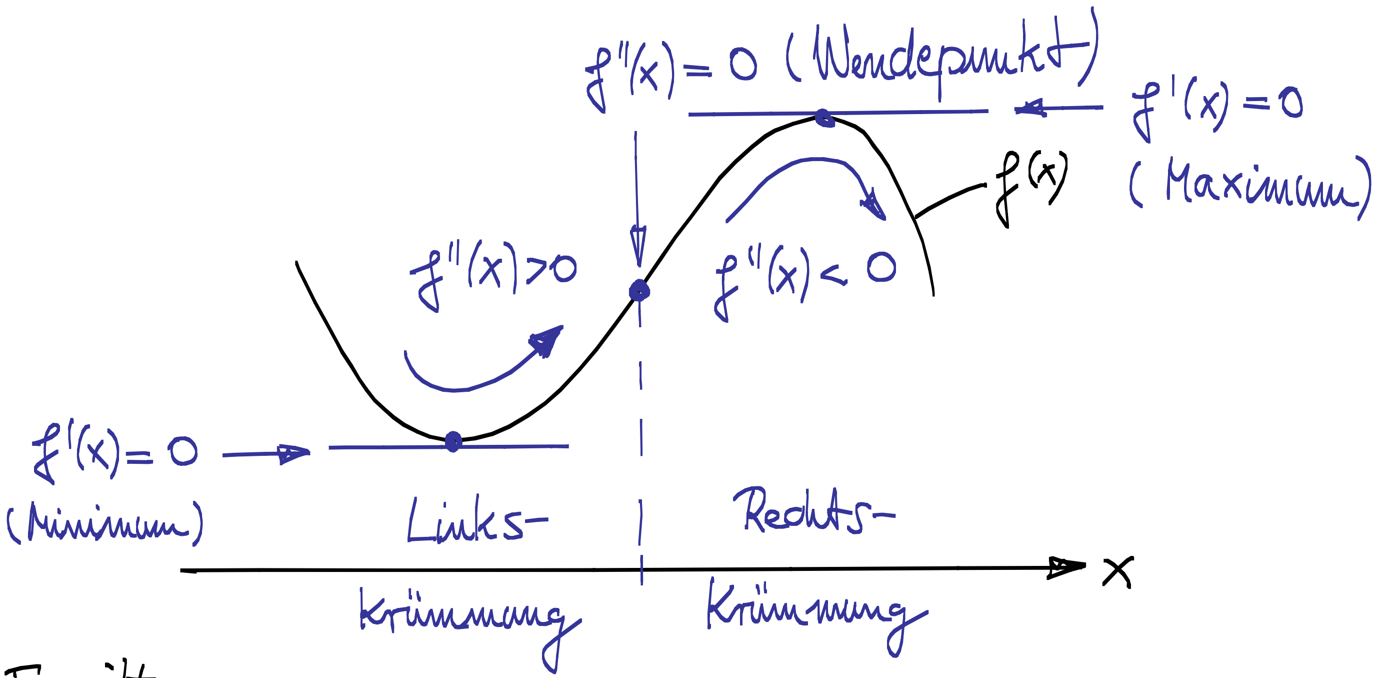
## Maxima, Minima und Wendepunkte

Sei $f$ eine zweimal differenzierbare Funktion, d.h. $f'(x)$ und $f''(x)$ existieren.

$f''(x) =$ Maß für die Krümmung.

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ Linkskrümmung ($f'(x)$ str. mon. wachsend)

$f''(x) < 0 \Rightarrow$ Rechtskrümmung ($f'(x)$ str. mon. fallend)




Es gilt:

$f$ hat in $x_0$ ein (lokales) Maximum bzw. Minimum, wenn

1.) $f'(x_0) = 0$,

2.) $f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$.

Falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat $f$ in $x_0$ einen Wendepunkt.

Beispiel:

$f(x) = 3x^5 - 20x^3$

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2$ ← Ableitung gleich Null setzen

$$15x^4 - 60x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 15x^2(x-2)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2},$$

drei Nullstellen der Ableitung

Kandidaten für Minima, Maxima

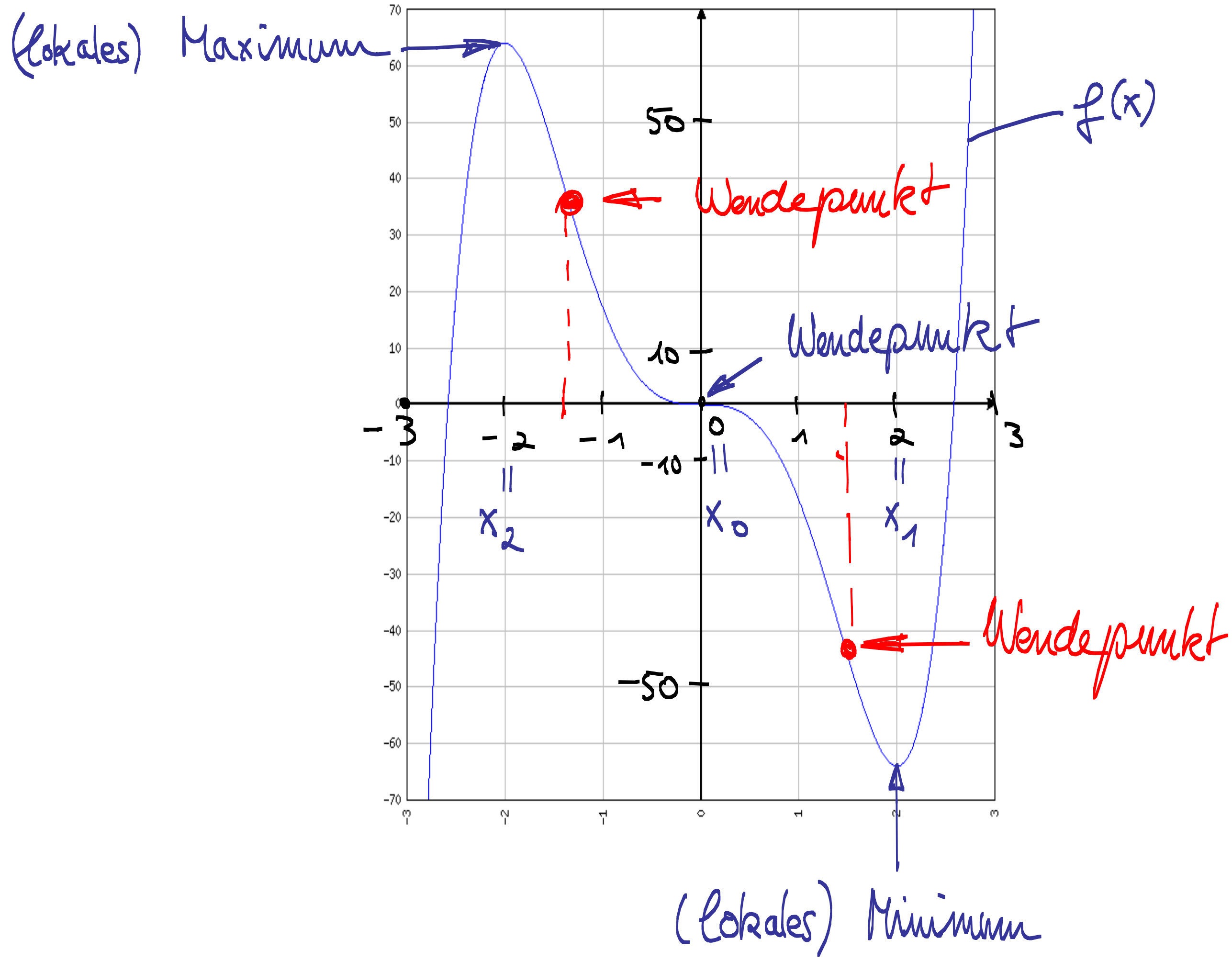
$f''(x) = 60x^3 - 120x$

$f'''(x) = 180x^2 - 120$

$$\left.\begin{aligned} f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= -120 \neq 0 \end{aligned}\right\} \text{ } f \text{ hat in } x_0 = 0 \text{ einen Wendepunkt}$$

$f''(2) = 240 > 0 \Rightarrow f$ hat in $x_1 = 2$ ein Minimum

$f''(-2) = -240 < 0 \Rightarrow f$ hat in $x_2 = -2$ ein Maximum




Hat $f$ weitere Wendepunkte?

$$f''(x) = 60x^3 - 120x = 0$$

$$\Leftrightarrow (60x^2 - 120)\cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2)\cdot x = 0 \qquad \underset{1{,}414\ldots}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{bereits als Wendepunkt erkannt}} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$$

$$f'''(\sqrt{2}) = 180\cdot 2 - 120 = 240 \neq 0$$

$$f'''(-\sqrt{2}) = 180\cdot 2 - 120 = 240 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $f$ hat in $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ zwei weitere Wendepunkte.