KLAUSUR – Vorbereitung : Mengen

1.) Geben Sie die folgenden Mengen explizit an:

(a) Die Menge der Ziffern der Zahl 30041777.

(b) $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n^2 < 30\}$

(c) $\{n \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge n^2 + n < 30\}$

2.) Seien $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{2,3,4,5,6,7\}$, $C = \{1,2,3\}$.

Bilden Sie

(a) $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap C$

(b) $B \setminus C$, $(A \setminus C) \cap (A \setminus B)$

3.) Bilden Sie die Vereinigung, den Durchschnitt und die Differenzmenge aus den folgenden beiden Mengen

$$A = \{k, a, m, e, l\}, \quad B = \{m, a, u, l, t, i, e, r\}.$$

4.) Seien $A = [5, 10]$, $B = (7, 15)$, $C = (3, 7)$, $D = (2, 5]$.

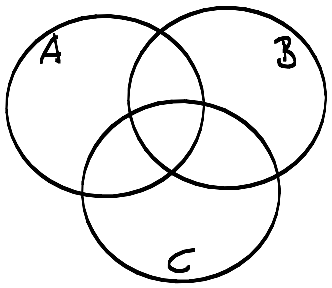
Bilden Sie

(a) $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$

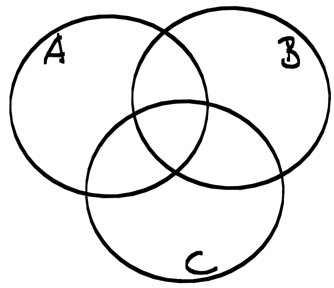
(b) $(A \cup C) \setminus B$, $(C \cap D) \setminus A$

5.) Schraffieren Sie die Mengen im Bild.

(a) $(A \cap B) \setminus C$



(b) $(C \setminus B) \cup (A \setminus B)$



6.) Berechnen Sie $|\mathcal{P}(\{e,i,s\})|$ und $\mathcal{P}(\{e,i,s\})$.

7.) Berechnen Sie $|A \times B|$ und $A \times B$ für $A = \{a, b, c\}$, $B = \{-1, 1\}$.

Wieviele Elemente hat das kartesische Produkt

$\{a, b, c, d, e, f\} \times \{2, 3, 5, 7\}$?

8.) Stellen Sie $[1,3] \times [1,2]$ und $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 \geq x^2\}$ jeweils in einem Koordinatensystem grafisch dar.

9.) Geben Sie für $A = \{1, 2, 3, 6\}$ die Relation

$$R = \{(a,b) \mid a, b \in A, \ a \text{ ist Teiler von } b\}$$

explizit an.

Stellen Sie R in einem Pfeildiagramm grafisch dar.

Untersuchen Sie, ob R reflexiv, symmetrisch oder transitiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

10.) Es sei $A = \{1, 2, 3, 5\}$. Stellen Sie die Relation

$$R = \{(x,y) \in A \times A \mid 0 \leq x - y \leq 1\}$$

in einem Pfeildiagramm grafisch dar. Untersuchen Sie die Relation auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

11.) Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in A. Geben Sie die Definition für die Äquivalenzklasse $[a]$ von $a \in A$ an.

12.) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$; b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$.

Lösung:

1.) (a) $\{3,0,4,1,7\} = \{0,1,3,4,7\}$

(b) $\{1,2,3,4,5\}$

(c) $\{0,1,2,3,4\}$

2.) (a) $B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A \cap B = \{2,3,4,5,6,7\}$,

$A \cap C = \{1,2,3\}$

(b) $B \setminus C = \{4,5,6,7\}$

$(A \setminus C) \cap (A \setminus B) = \{4,5,6,7\} \cap \{1\} = \emptyset$

3.) $A \cup B = \{k, a, m, e, l, u, t, i, r\}$

$A \cap B = \{a, m, e, l\}$

$A \setminus B = \{k\}$

$B \setminus A = \{u, t, i, r\}$

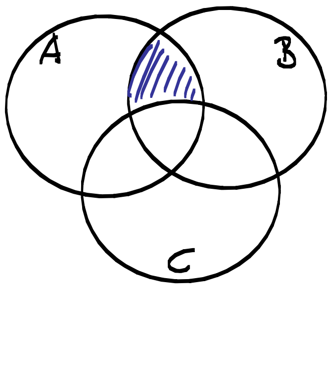
4.) (a) $A \cap B = (7, 10]$, $A \cup B = [5, 15)$

$A \setminus B = [5, 7]$, $B \setminus A = (10, 15)$

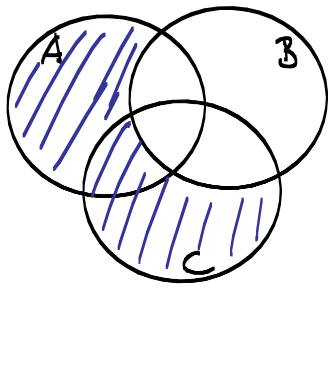
(b) $(A \cup B) \setminus B = (3, 10] \setminus B = (3, 7]$

$(C \cap D) \setminus A = (3, 5] \setminus A = (3, 5)$

5.) (a) $(A \cap B) \setminus C$



(b) $(C \setminus B) \cup (A \setminus B)$



6.) Es ist $|\mathcal{P}(\{e,i,s\})| = 2^3 = 8$ und

$$\mathcal{P}(\{e,i,s\}) = \{\emptyset, \{e\},\{i\},\{s\}, \{e,i\},\{e,s\},\{i,s\}, \{e,i,s\}\}.$$

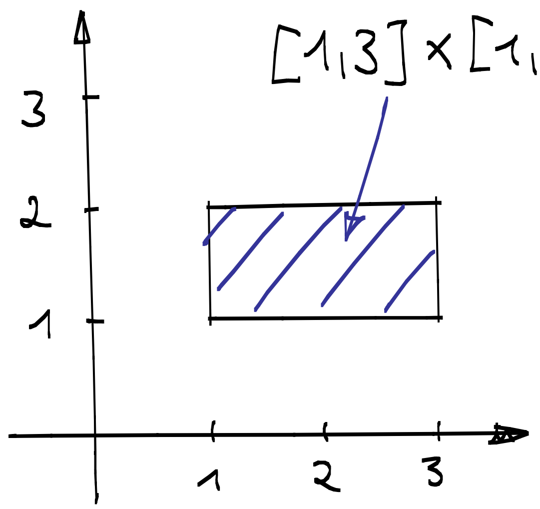
7.) $A = \{a,b,c\}$, $B = \{-1,1\}$

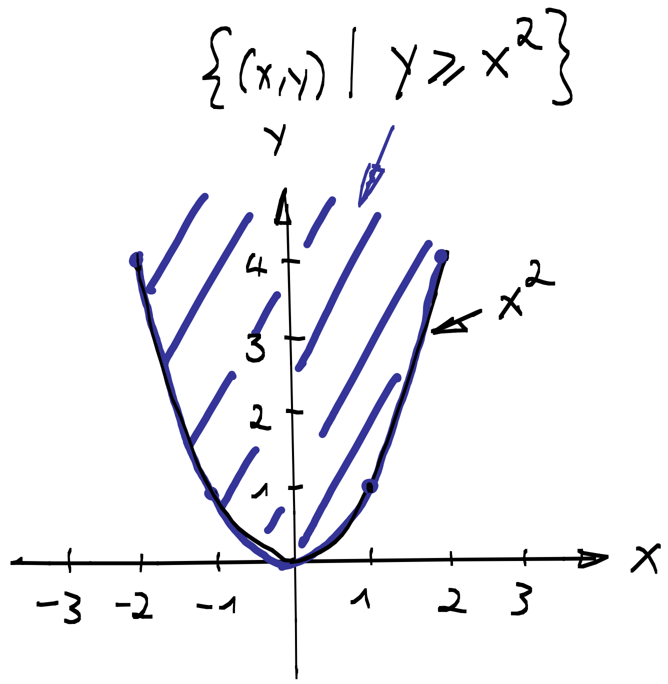
$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot 2 = 6$$

$$A \times B = \{(a,-1),(a,1),(b,-1),(b,1),(c,-1),(c,1)\}$$

$$|\{a,b,c,d,e,f\} \times \{2,3,5,7\}| = 6 \cdot 4 = 24$$

8.)



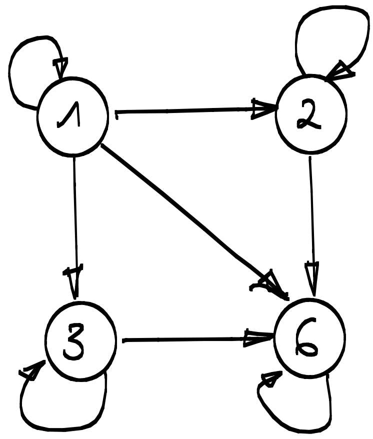


9.) $A = \{1,2,3,6\}$

$(a,b) \in R \Leftrightarrow aRb \Leftrightarrow a$ ist Teiler von b.

$R = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,6),$
$(2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (6,6) \}$

Pfeildiagramm:



R ist reflexiv wegen $1R1, 2R2, 3R3, 6R6$.

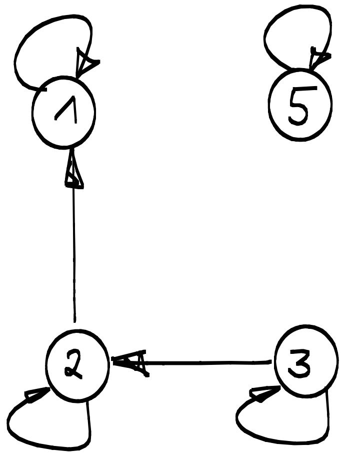
R ist <u>nicht</u> symmetrisch, denn $(1,6) \in R$ aber $(6,1) \notin R$.

R ist transitiv, denn es gilt

$$\underbrace{aRb}_{a \text{ Teiler von } b} \wedge \underbrace{bRc}_{b \text{ Teiler von } c} \Rightarrow \underbrace{aRc}_{a \text{ Teiler von } c}$$

z.B. $1R2, 2R6, 1R6$ (siehe Diagramm)

10.) $R = \{ (x,y) \in A \times A \mid 0 \leq x - y \leq 1 \}$
$= \{ (1,1), (2,2), (3,3), (5,5), (2,1), (3,2) \}$



$A = \{1, 2, 3, 5\}$

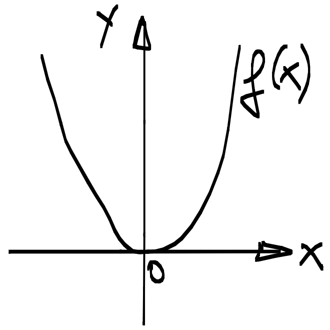
R ist reflexiv.

R ist nicht symmetrisch.

R ist nicht transitiv.

11.) $[a] := \{ b \mid b \in A, \ b \sim a \}$

12.) a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^4$

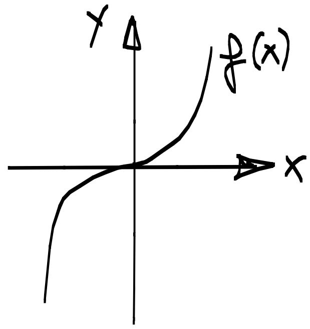


f ist nicht injektiv

f ist nicht surjektiv

f ist nicht bijektiv

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = x^5$



f ist injektiv

f ist surjektiv

f ist bijektiv