# KLAUSUR-Vorbereitung: Folgen

1.) Bestimmen Sie die Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2+1}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4+\frac{1}{n^2}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^n$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)^n$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4+\frac{3}{n}\right)^3$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4$

2.) Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $x_n = \frac{4n^2+3n+2}{6n^2+5n+3}$

b) $x_n = \frac{5^{n+1}-2^n}{5^n+2}$

c) $x_n = \frac{n^2}{n^3-2}$

d) $x_n = \frac{n^3-2}{n^2} - n + 1$

e) $x_n = \frac{4n^3+4n^2-8n+15}{9n^3-2n^2+4n-9}$

f) $x_n = \frac{3n^2-2n+5}{n+4}$

g) $x_n = \frac{\sqrt{4n}-8}{\sqrt{10n}-4}$

h) $x_n = \frac{2n^2+3n}{n+7} - 2n$

i) $x_n = 2-(-1)^n$

## Lösung

1.) a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{25}{n^2+1}\right) = 1 - 0 = 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{4+0} = 2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right)^n = \lim \left(\frac{18+12}{27}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{30}{27}\right)^n = \infty$

$q = \frac{30}{27} > 1$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4 + \frac{3}{n}\right)^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \left\{\left(4+\frac{3}{n}\right) \cdot \left(4+\frac{3}{n}\right) \cdot \left(4+\frac{3}{n}\right)\right\}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(4 + \frac{3}{n}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(4 + \frac{3}{n}\right) \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(4 + \frac{3}{n}\right)$

$= 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^4$

$= 1^4 = 1$

2.) a) Kürzen von $n^2$ liefert

$$x_n = \frac{4 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{6 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(6 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{4+0+0}{6+0+0} = \frac{2}{3}$$

b) Kürzen von $5^n$ liefert

$$x_n = \frac{5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{2}{5^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{2}{5^n}\right)} = \frac{5-0}{1+0} = 5$$

c) $$x_n = \frac{n^2}{n^3 - 2} = \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} - \frac{2}{n^3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{2}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{0}{1-0} = 0$$

d) $$x_n = \frac{n^3 - 2}{n^2} - n + 1 = \cancel{n} - \frac{2}{n^2} \cancel{- n} + 1$$

$$= 1 - \frac{2}{n^2} \xrightarrow{(n\to\infty)} 1 - 0 = 1$$

e) $x_n = \dfrac{4n^3+4n^2-8n+15}{9n^3-2n^2+4n-9} = \dfrac{4+\frac{4}{n}-\frac{8}{n^2}+\frac{15}{n^3}}{9-\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}-\frac{9}{n^3}}$

$\xrightarrow{(n\to\infty)} \dfrac{4+0-0+0}{9-0+0-0} = \dfrac{4}{9}$

f) $x_n = \dfrac{3n^2-2n+5}{n+4} = \dfrac{3n-2+\frac{5}{n}}{1+\frac{4}{n}}$

Der Nenner konvergiert gegen 1.

Der Zähler wird beliebig groß, wenn $n$ nur groß genug gewählt wird.

$\Rightarrow x_n \to \infty \quad (n\to\infty)$

h) $x_n = \dfrac{\sqrt{4n}-8}{\sqrt{10n}-4} = \dfrac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{n}-8}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{n}-4}$

$= \dfrac{\sqrt{4}-\frac{8}{\sqrt{n}}}{\sqrt{10}-\frac{4}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{(n\to\infty)} \dfrac{\sqrt{4}-0}{\sqrt{10}-0} = \sqrt{0{,}4} = 0{,}2$

h) $x_n = \dfrac{2n^2+3n}{n+7} - 2n = \dfrac{2n^2+3n-2n(n+7)}{n+7}$

$= \dfrac{-11n}{n+7} = \dfrac{-11}{1+\frac{7}{n}} \xrightarrow{(n\to\infty)} \dfrac{-11}{1+0} = -11$

i) $x_n = 2-(-1)^n, \quad \left.\begin{matrix} x_1 = x_3 = \ldots = 3 \\ x_2 = x_4 = \ldots = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_n)$ nicht konvergent