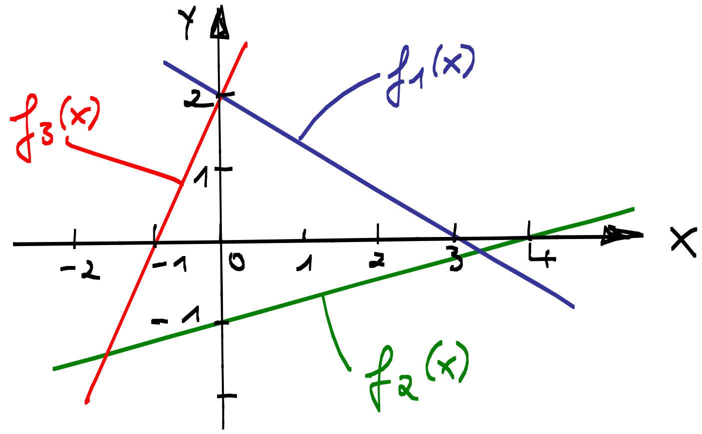
KLAUSUR-Vorbereitung: Funktionen I

1.) Wie lauten die Funktionen der drei Geraden im Koord.system?



2.) Gegeben seien die quadratischen Funktionen

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$.

Bestimmen Sie jeweils die

a) Scheitelpunktsform,

b) Nullstellenform.

Zeichnen Sie die Grafen der Funktionen.

3.) Berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = 3x^2 - 18x + 24$. Zeichnen Sie den Grafen.

4.) Schreiben Sie das Polynom $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ als Produkt von Linearfaktoren (Nullstellenform). Untersuchen Sie dafür zuerst, ob 1 eine Nullstelle ist. Tipp: Polynomdivision.

5) Berechnen Sie alle Nullstellen von $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Tipp: Berechnen sie zuerst $p(1)$.

Lösung

1.) Ansatz: $f_1(x) = ax + b$

$f_1(0) = 2 \Rightarrow b = 2$

$f_1(3) = 0 \Rightarrow a \cdot 3 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3a = -2$

$\Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$

$f_1(x) = -\frac{2}{3} a + 2$

Ansatz: $f_2(x) = ax + b$

$f_2(0) = -1 \Rightarrow b = -1$

$f_2(4) = 0 \Rightarrow a \cdot 4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4a = 1$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$

$f_2(x) = \frac{1}{4} x - 1$

Ansatz: $f_3(x) = ax + b$

$f_3(0) = 2 \Rightarrow b = 2$

$f_3(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow -a = -2$

$\Leftrightarrow a = 2$

$f_3(x) = 2x + 2$

2.) $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

$$= 2(x^2 - 2x) - 6$$

$$= 2\Big(x^2 - 2x + \underbrace{\left(\tfrac{2}{2}\right)^2}_{\text{quadratische Ergänzung}} - \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\Big) - 6$$

$$= 2\big((x-1)^2 - 1\big) - 6$$

$$= 2(x-1)^2 - 8 \quad \text{Scheitelpunktsform}$$

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6 = 0$

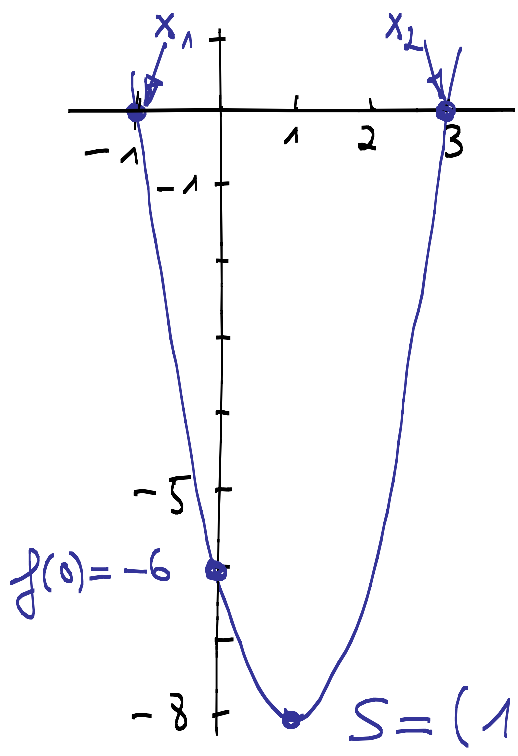
$\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0 \quad , p = -2, \; q = -3$

p,q-Formel: $\quad x_1 = 1 - \sqrt{1+3} = -1$

$\qquad\qquad\qquad x_2 = 1 + \sqrt{1+3} = 3$

$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot (x - (-1))(x-3)$

$\qquad = 2(x+1)(x-3)$ Nullstellenform



$S = (1, -8)$ Scheitelpunkt

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x\right) - 2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) - 2$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left(x+2\right)^2 - 4\right) - 2$$

$$= -\frac{1}{2}(x+2)^2 \quad \text{Scheitelpunktform}$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0 \;,\; p = 4 \;,\; q = 4$$

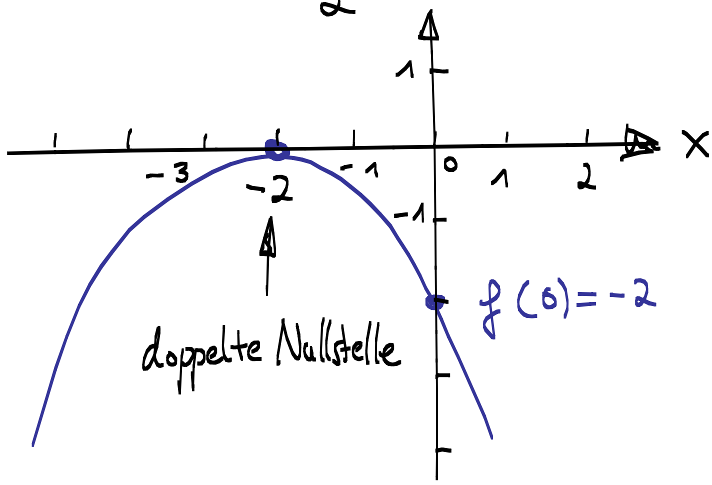
p,q-Formel: $x_1 = -2 - \sqrt{4-4} = 0$

$x_2 = -2 + \sqrt{4-4} = 0$

d.h. $x_{1,2} = -2$ doppelte Nullstelle

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - (-2)\right)\left(x - (-2)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}(x+2)^2 \quad \text{Nullstellenform}$$



3.) $f(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$$= 3(x^2 - 6x) + 24$$

$$= 3\left(x - 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) + 24$$

$$= 3\left((x-3)^2 - 9\right) + 24$$

$$= 3(x-3)^2 - 3$$

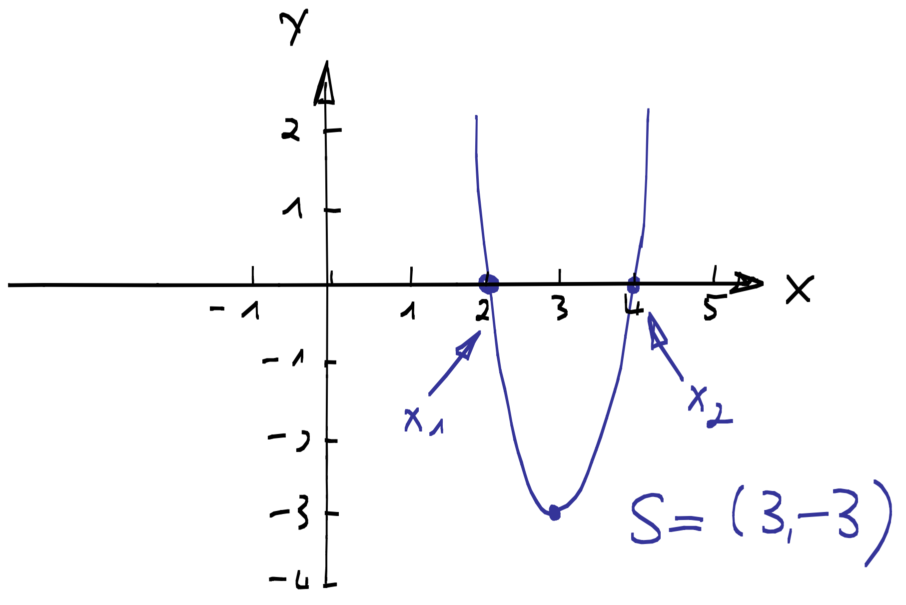
$f(3) = -3$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt $(3, -3)$

$f(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 6x + 8 = 0$, $p = -6$, $q = 8$

p,q-Formel: $x_1 = 3 - \sqrt{9-8} = 2$, $x_2 = 3 + \sqrt{9-8} = 4$ } Nullstellen



4.) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$p(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$

$\Rightarrow$ 1 ist eine Nullstelle von p

Polynomdivision

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad -x^2 - 5x \\
\quad -(-x^2 + x) \\
\hline
\qquad -6x + 6 \\
\qquad -(-6x + 6) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - x - 6 = 0$, $p = -1$, $q = -6$

p,q-Formel $\quad x_1 = \frac{1}{2} - \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6}_{\frac{25}{4}}} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2$

$x_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

$\Rightarrow \quad x^2 - x - 6 = (x - (-2)) \cdot (x - 3) = (x+2)(x-3)$

Ergebnis

$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

$= \underline{\underline{(x-1)(x+2)(x-3)}}$ Produkt von Linearfaktoren (Nullstellenform)

5.) $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$p(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{1}}$ ist Nullstelle von p

Polynomdivision:

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6$$

$$\begin{array}{l}
-\underline{(x^3 - x^2)} \\
\quad -5x^2 + 11x \\
\quad -\underline{(-5x^2 + 5x)} \\
\qquad 6x - 6 \\
\qquad -\underline{(6x - 6)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0$, $p = -5$, $q = 6$

p,q-Formel: $x_1 = \frac{5}{2} - \sqrt{\underbrace{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}_{\frac{1}{4}}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{2}}$

$x_2 = \frac{5}{2} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{3}}$

<u>Ergebnis:</u> p hat die Nullstellen $1, 2, 3$.