KLAUSUR-Vorbereitung: Komplexe Exponentialfunktion

1.) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+ib$ mit $a,b \in \mathbb{R}$ dar. Verwenden Sie ggfs. einen Taschenrechner.

(a) $2e^{i\frac{\pi}{6}}$ (b) $3e^{\frac{3}{4}\pi i}$ (c) $5e^{\pi i}$

(d) $3e^{\frac{25}{36}2\pi i}$ (e) $4e^{i\frac{\pi}{2}}$ (f) $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(g) $e^{1024i+5}$ (h) $e^{(1+i)(2-i)}$

(i) $e^{\frac{1}{1+i}}$ (j) $e^{(1+i)^4}$

2.) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Geben Sie die Ergebnisse in der Form $a+ib$ an.

(a) $\dfrac{2i}{3-4i} + 2\cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})} + 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

(b) $\dfrac{(3+i)\cdot e^{-i\frac{2}{3}\pi}}{(1-i)^2\cdot \overline{2i}} + \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\pi}}$

(c) $\left[2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10}$

(d) $\left[5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)\right]^{4}$

Lösungen

1.)

a) $2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\cdot\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{0{,}866\ldots} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}_{0{,}5}\right)$

$= 1{,}732\ldots + i$

b) $3e^{\frac{3}{4}\pi i} = 3e^{i\cdot\frac{3}{4}\pi} = 3\left(\underbrace{\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)}_{-0{,}707\ldots} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)}_{0{,}707\ldots}\right)$

$= -2{,}121\ldots + i\cdot 2{,}121\ldots$

c) $5e^{\pi i} = 5\cdot\left(\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + i\cdot\underbrace{\sin(\pi)}_{0}\right) = -5$ reelle Zahl

d) $3e^{\frac{25}{36}2\pi i} = 3\cdot\left(\underbrace{\cos\left(\frac{25}{36}2\pi\right)}_{-0{,}342\ldots} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{25}{36}2\pi\right)}_{-0{,}939\ldots}\right)$

$= -1{,}026 + i\cdot 2{,}819\ldots$

e) $4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4\cdot\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + i\,\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}\right) = 4i$ imaginäre Zahl

f) $4e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4\cdot\left(\underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{0{,}707\ldots} + i\,\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}_{-0{,}707\ldots}\right)$

$= 2{,}828\ldots - i\cdot 2{,}828\ldots$

g) $e^{1024i+5} = e^{1024i} \cdot e^{5}$

$= (\underbrace{\cos(1024)}_{0{,}987\ldots} + i\,\underbrace{\sin(1024)}_{-0{,}158\ldots}) \cdot \underbrace{e^{5}}_{148{,}4\ldots}$

$= 146{,}5\ldots - i \cdot 23{,}5\ldots$

h) $e^{(1+i)(2-i)} = e^{2-i+2i-(-1)}$

$= e^{3+i} = e^{3} \cdot e^{i}$

$= \underbrace{e^{3}}_{20{,}08\ldots} \cdot (\underbrace{\cos(1)}_{0{,}540\ldots} + i\,\underbrace{\sin(1)}_{0{,}841\ldots})$

$= 10{,}85\ldots + i \cdot 16{,}90\ldots$

i) $e^{\frac{1}{1+i}} = e^{\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}} = e^{\frac{1-i}{1+1}} = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}$

$= e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}i} = e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{i(-\frac{1}{2})}$

$= \underbrace{e^{\frac{1}{2}}}_{1{,}64\ldots} \cdot (\underbrace{\cos(-\tfrac{1}{2})}_{0{,}877\ldots} + i\,\underbrace{\sin(-\tfrac{1}{2})}_{-0{,}479\ldots})$

$= 1{,}446\ldots - i \cdot 0{,}790\ldots$

j) $e^{(1+i)^4} = e^{(1+2i-1)^2} = e^{(2i)^2} = e^{-4}$

$= 0{,}0183\ldots$ reelle Zahl

2.)

a) $\dfrac{2i\,(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{6i-8}{9+16} = -\dfrac{8}{25} + \dfrac{6}{25}i$

$= -0{,}32 + 0{,}24 \cdot i$

$2 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})} = 2 \cdot \Big(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)}_{0{,}866\ldots} + i \underbrace{\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)}_{-0{,}5} \Big)$

$= 1{,}732\ldots - i$

$3 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 3 \Big(\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{0{,}707\ldots} + i \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{0{,}707\ldots} \Big)$

$= 2{,}121\ldots + i \cdot 2{,}121\ldots$

$\Rightarrow \dfrac{2i}{3-4i} + 2 \cdot e^{i(-\frac{\pi}{6})} + 3e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= -0{,}32 + i \cdot 0{,}24$

$+ 1{,}732\ldots - i$

$+ 2{,}121\ldots + i\,2{,}121\ldots$

$= \underline{\underline{3{,}533\ldots + i \cdot 1{,}361\ldots}}$

b) $$\frac{(3+i)e^{-i\frac{2}{3}\pi}}{(1-i)^2\cdot\overline{2i}} = \frac{3+i}{(\cancel{1}-2i-\cancel{1})(-2i)}\cdot(\underbrace{\cos(-\tfrac{2}{3}\pi)}_{-0{,}5}+i\,\underbrace{\sin(-\tfrac{2}{3}\pi)}_{-0{,}866\ldots})$$

$$= \underbrace{\frac{3+i}{-4}}_{-\frac{3}{4}-i\cdot\frac{1}{4}}\cdot(-0{,}5-i\cdot 0{,}866\ldots)$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 0{,}5 - \frac{1}{4}\cdot 0{,}866\ldots + i\left(\frac{3}{4}\cdot 0{,}866\ldots + \frac{1}{4}\cdot 0{,}5\right)$$

$$= 0{,}158\ldots + i\cdot 0{,}774\ldots$$

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\pi}} = \frac{2i}{-1} = -2i$$

$$\Rightarrow \frac{(3+i)e^{-i\frac{2}{3}\pi}}{(1-i)^2\cdot\overline{2i}} + \frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i2\pi}} = \underline{\underline{0{,}158\ldots - i\cdot 1{,}225\ldots}}$$

c) $$\left[2\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10}$$

$$= 2^{10}\cdot\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{3}}\right)^{10} = 1024\cdot e^{i\frac{\pi}{3}\cdot 10}$$

$$= 1024\cdot\left(\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\cdot 10\right)}_{-0{,}5}+i\,\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\cdot 10\right)}_{-0{,}866\ldots}\right)$$

$$= \underline{\underline{-512 - i\cdot 886{,}8\ldots}}$$

d) $\left[5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right)\right]^4$

$$= 5^4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{18}\cdot 4} = 625\cdot\Big(\underbrace{\cos\left(-\tfrac{2\pi}{9}\right)}_{0{,}766\ldots} + i\cdot\underbrace{\sin\left(-\tfrac{2\pi}{9}\right)}_{-0{,}642\ldots}\Big)$$

$$= \underline{\underline{478{,}77\ldots - i\cdot 401{,}74\ldots}}$$