KLAUSUR-Vorbereitung: Funktionen II

1.) Es seien die Funktionen

$$f(x) = x^2 + x + 1 \text{ und } g(x) = 3x - 1$$

gegeben. Berechnen Sie die Kompositionen $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ und $g \circ g$.

2.) Bilden Sie zu der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ die Umkehrfunktion f^{-1}.

3.) Es sei $f: [0,1] \to [0,4]$, $f(x) = 4x^2$.

a) Stellen Sie f grafisch dar.

b) Wie lautet die Umkehrfunktion f^{-1}.

c) Stellen Sie f^{-1} grafisch dar.

4.) Welche Funktion ist stetig, welche unstetig?

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \leq 0 \\ \sin(x), & x > 0 \end{cases}$$

Stellen Sie f und g grafisch dar, und begründen Sie Ihre Antwort.

5.) Berechnen Sie den Differenzenquotienten von

a) $f(x) = 2x + 1$ und b) $g(x) = x^2 + 1$

im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, und kürzen Sie diesen so weit wie möglich.

1.) $f(x) = x^2 + x + 1$ und $g(x) = 3x - 1$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = g(x)^2 + g(x) + 1 \\
&= (3x-1)^2 + (3x-1) + 1 \\
&= 9x^2 - 6x + 1 + 3x - 1 + 1 \\
&= 9x^2 - 3x + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 3f(x) - 1 \\
&= 3(x^2 + x + 1) - 1 \\
&= 3x^2 + 3x + 2
\end{aligned}
$$

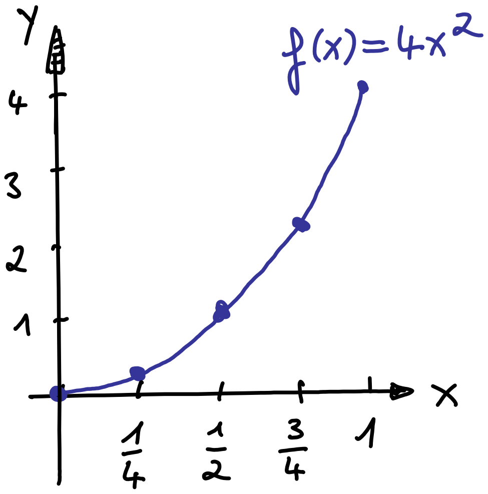
$$
\begin{aligned}
(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x)^2 + f(x) + 1 \\
&= \underbrace{(x^2 + (x+1))^2} + (x^2 + x + 1) + 1 \\
&= x^4 + \underbrace{2x^2(x+1)} + \underbrace{(x+1)^2} \\
&= x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + x + 2 \\
&= x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(g \circ g)(x) &= g(g(x)) = 3g(x) - 1 \\
&= 3(3x-1) - 1 \\
&= 9x - 4
\end{aligned}
$$

2.) $2x + 1 = y$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 2x &= y - 1 \\
\Leftrightarrow \quad x &= \underline{\underline{\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2} =: f^{-1}(y)}}
\end{aligned}
$$

3.) a) $f: [0,1] \to [0,4]$, $f(x) = 4x^2$



$f(0) = 0$
$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$
$f(\frac{1}{2}) = 1$
$f(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
$f(1) = 4$

b) Es gelte

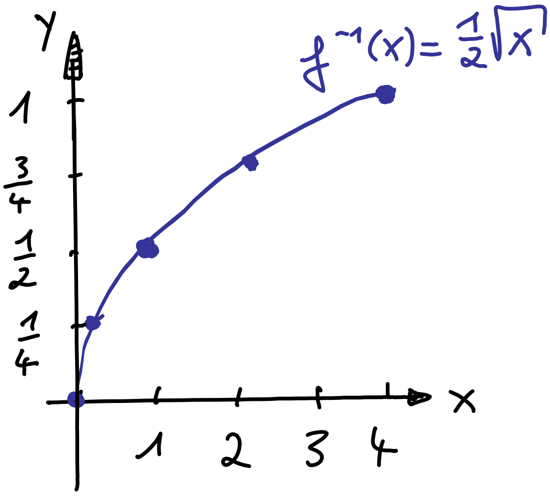
$$4x^2 = y \quad \text{mit } x \in [0,1], y \in [0,4]$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} y$$

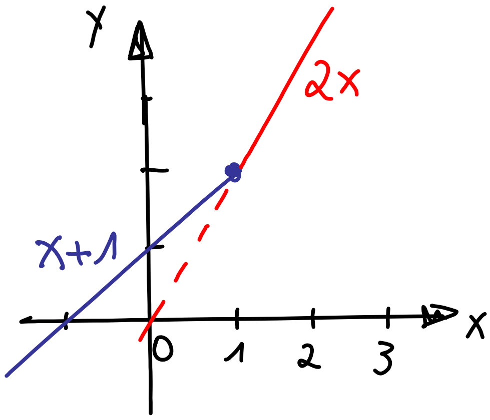
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\sqrt{y} \quad \vee \quad \underbrace{x = -\frac{1}{2}\sqrt{y}}_{\text{nicht möglich, da } x \in [0,1] \text{ vorausgesetzt war}}$$

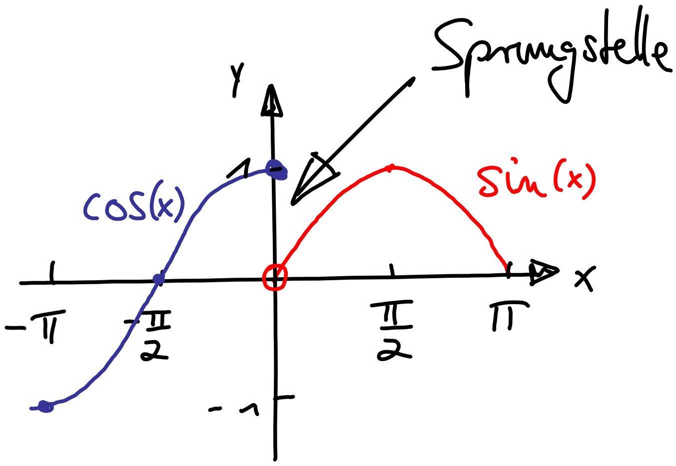
$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\sqrt{y} \quad \text{Umkehrfunktion.}$$

c) $f^{-1}: [0,4] \to [0,1]$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$



4.) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq 1 \\ 2x, & x>1 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} \cos(x), & x\leq 0 \\ \sin(x), & x>0 \end{cases}$





keine Sprungstelle

f ist stetig

g ist nicht stetig

5.) $f(x)=2x+1$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{2x+1-(2x_0+1)}{x-x_0}$$

$$=\frac{2x-2x_0}{x-x_0}$$

$$=\frac{2\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}$$

$$=\underline{\underline{2}}$$

d.h. $f'(x_0)=2$

$$g(x) = x^2 + 1$$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{x - x_0}$$

$$= \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

$$= \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{x - x_0}}$$

$$= \underline{\underline{x + x_0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

d.h. $f'(x_0) = 2x_0$