KLAUSUR-Vorbereitung: Differenzialrechnung

1.) Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Funktion $f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \sin x$.

2.) Differenzieren Sie folgende Funktionen.

a) $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[3]{x^4}$

b) $x^5 \cdot \ln x$, $4 \sin x \cdot \tan x$, $(\cos x - \sin x) e^x$, $2 e^x \arcsin x$

c) $\frac{x^2}{1-x^2}$, $\frac{\cos x}{x^2}$, $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

d) $(4x^2-2x+1)^5$, $\ln \sqrt{4x-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a+bx^2}}$

$4 \cdot e^{\cos x - \sin x}$, $4\sqrt{x^2+\sqrt{x}}$, $\cos(5x^2-3x+1)$

$\ln(\cos(1-x^2))$, $\sqrt{\cos(5x^2)}$

e) $e^{x \cdot \cos x}$, $e^{-x^2} \cdot \ln(x^3+1)$, $\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$

3.) a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2x^3$ streng monoton wachsend ist.

b) Berechnen Sie, ohne die Umkehrfunktion f^{-1} explizit anzugeben, $(f^{-1})'(0)$ und $(f^{-1})'(3)$ unter Verwendung der Ableitungsregel der Umkehrfunktion.

Tipp: $f(0) = 0$, $f(1) = 3$.

4.) Zeigen Sie: Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^{-x}$ hat in $x = 1$ ein lokales Maximum.

5.) Betrachten Sie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\, e^{-2x}$

a) Zeigen Sie:

$$f'(x) = (3 - 2x)\, e^{-2x}$$

$$f''(x) = (-8 + 4x)\, e^{-2x}$$

$$f'''(x) = (20 - 8x)\, e^{-2x}$$

b) Bestimmen Sie die (lokalen) Maxima und Minima.

c) Wo besitzt f einen Wendepunkt?

Lösungen

1.) $f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \sin x$

$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

$f''(x) = x - \sin x$

$f'''(x) = 1 - \cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

2.)

a) $\left(\sqrt[4]{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4 \cdot \sqrt[4]{x}}$

$\left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt[3]{x}$

b) $(x^5 \ln x)' = 5x^4 \ln x + x^5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4 \ln x + x^4$

$(4 \sin x \cdot \tan x)' = 4 \cos x \cdot \tan x + 4 \sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

$\left((\cos x - \sin x) e^x\right)' = (-\sin x - \cancel{\cos x}) e^x + (\cancel{\cos x} - \sin x) e^x$

$= -2 \sin x \, e^x$

$(2e^x \arcsin x)' = 2e^x \arcsin x + 2e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{2x(1-x^2) - x^2 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x - \cancel{2x^3} + \cancel{2x^3}}{(1-x^2)^2}$

$= \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

$$\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{-\sin x \cdot x^{\cancel{2}} - \cos x \cdot 2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}\,3}} = -\frac{x\sin x + 2\cos x}{x^3}$$

$$\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x \,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}{x}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}\cdot x}$$

d) $\left(\left(4x^2-2x+1\right)^5\right)' = 5\left(4x^2-2x+1\right)^4\cdot(8x-2)$

$$\left(\ln\sqrt{4x-x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\cdot\frac{\overset{2}{\cancel{4}} - \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4x-x^2}} = \frac{2-x}{4x-x^2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a+bx^2}}\right)' = \left(\left(a+bx^2\right)^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\left(a+bx^2\right)^{-\frac{4}{3}}\cdot 2bx$$

$$= -\frac{2}{3}\,\frac{bx}{\sqrt[3]{\left(a+bx^2\right)^4}}$$

$$\left(4e^{\cos x-\sin x}\right)' = 4\cdot e^{\cos x - \sin x}\cdot(-\sin x - \cos x)$$

$$\left(4\sqrt{x^2+\sqrt{x}}\right)' = \overset{2}{\cancel{4}}\,\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}\cdot\left(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{4x+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x}}}$$

$$\left(\cos\left(5x^2-3x+1\right)\right)' = -\sin\left(5x^2-3x+1\right)\cdot(10x-3)$$

$$\left(\ln\left(\cos\left(1-x^2\right)\right)\right)' = \frac{1}{\cos\left(1-x^2\right)}\cdot\left(-\sin\left(1-x^2\right)\cdot(-2x)\right)$$

$$= \frac{2x\sin\left(1-x^2\right)}{\cos\left(1-x^2\right)} = 2x\tan\left(1-x^2\right)$$

$$\left(\sqrt{\cos(5x^2)}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\cos(5x^2)}} \cdot \left(-\sin(5x^2)\right) \cdot \cancel{10}^{\,5} x$$

$$= -\frac{5x\sin(5x^2)}{\sqrt{\cos(5x^2)}}$$

e) $$\left(e^{x\cdot\cos x}\right)' = e^{x\cdot\cos x} \cdot (x\cos x)'$$

$$= e^{x\cos x} \cdot (\cos x - x\sin x)$$

$$\left(e^{-x^2}\ln(x^3+1)\right)' = e^{-x^2}\cdot(-2x)\ln(x^3+1) + e^{-x^2}\cdot\frac{3x^2}{x^3+1}$$

$$= -x e^{-x^2}\left(2\ln(x^3+1) - \frac{3x}{x^3+1}\right)$$

$$\left(\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\right)' = \frac{\frac{2x}{x^2+1}\cdot x^{\cancel{3}\,1} - \ln(x^2+1)\cdot 3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{6}\,4}}$$

$$= \frac{2x^2 - 3(x^2+1)\ln(x^2+1)}{(x^2+1)\,x^4}$$

3.) a) $f(x) = x + 2x^3$

$f'(x) = 1 + 6x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ streng monoton wachsend.

b) Es ist $$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + 6(f^{-1}(x))^2}$$

$$(f^{-1})(0) = 0,\ (f^{-1})(3) = 1$$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{1+6\cdot 0} = 1$$

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{1+6\cdot 1} = \frac{1}{7}$$

4.) $f(x) = x e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = 0$

$\Longleftrightarrow \quad 1 - x = 0$

$\Longleftrightarrow \quad x = 1$

$f''(x) = -e^{-x} - (e^{-x} - x e^{-x})$

$= -2e^{-x} + x e^{-x}$

$= (x-2) e^{-x}$

$f''(1) = -1 e^{-1} = -\frac{1}{e} < 0$

$\Rightarrow$ f hat in $x = 1$ ein (lokales) Maximum

$f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

5.)

$$f(x) = (x-1)e^{-2x}$$

a) $$f'(x) = e^{-2x} - 2(x-1)e^{-2x}$$
$$= (1-2(x-1))e^{-2x}$$
$$= (3-2x)e^{-2x}$$

$$f''(x) = -2e^{-2x} - 2(3-2x)e^{-2x}$$
$$= (-2-2(3-2x))e^{-2x}$$
$$= (-8+4x)e^{-2x}$$

$$f'''(x) = 4e^{-2x} - 2(-8+4x)e^{-2x}$$
$$= (4-2(-8+4x))e^{-2x}$$
$$= (20-8x)e^{-2x}$$

b) Lokale Extremwerte:

$$f'(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3-2x = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x = 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-8 + 4 \cdot \frac{3}{2}\right) e^{-3} = -\frac{2}{e^3} < 0$$

$\Rightarrow$ f hat in $x = \frac{3}{2}$ ein (lokales) Maximum

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) e^{-3} = \frac{1}{2e^3} = 0{,}0249\ldots$$

c) Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -8 + 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2$$

$$f'''(2) = (20 - 8 \cdot 2)\, e^{-4}$$

$$= \frac{4}{e^4} \neq 0$$

$\Rightarrow$ f hat in $x = 2$ einen Wendepunkt