KLAUSUR-Vorbereitung: Matrizen

1.) Führen Sie folgende Matrix-Vektor-Multiplikationen aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2.) Berechnen Sie die Matrizenprodukte $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot B$ (soweit diese überhaupt existieren) für

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$

3.) Welche Matrizen sind regulär und welche singulär? Wie lautet der Rang der Matrizen?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.) Invertieren Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie anschließend $A \cdot A^{-1}$ und $B \cdot B^{-1}$ berechnen.

Lösung

1.) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4+1 \\ 2+6+1 \\ 4+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 \\ -2+0+1 \\ 4+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.) a) $A \cdot A = \begin{pmatrix} 13 & 34 & 18 \\ 8 & 32 & 17 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} -13 & 19 & 15 \\ -21 & 10 & 12 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 32 & 17 \\ -5 & -3 & -1 \\ -12 & -13 & -8 \end{pmatrix}$

$B \cdot B = \begin{pmatrix} -21 & 10 & 12 \\ -4 & -9 & -6 \\ -16 & -20 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A \cdot A$ und $B \cdot B$ existieren nicht.

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 12 & 29 \\ 1 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 1 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

3.)

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-1) \\ \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ | \cdot (-1) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right\} \text{2 Nicht-Null-Zeilen}$$
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ A ist singulär, rang $(A) = 2$

$$B = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} | \cdot (-2) \\ \leftarrow \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} \\ | \cdot (-3) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 13 \end{matrix}\right\} \text{3 Nicht-Null-Zeilen}$$

$\Rightarrow$ B ist regulär, rang $(B) = 3$

4.) $A = \left\{ \begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$

$$\begin{array}{cc|ccl} -1 & 0 & 0 & 1 & \mid \cdot (-1) \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & \mid \cdot 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 2 & 1 & -1 & \mid \cdot \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$

$$B = \left\{ \begin{array}{cc|ccl} 1 & 0 & 1 & 0 & \mid \cdot (-3) \\ 3 & 4 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 4 & -3 & 1 & \mid : 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \end{array} \right.$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix}}_{B^{-1}}$$

$$\Rightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓