Übungen zur Mathematik 1
Lösungen Blatt 2

Aufgabe 1

Aussagen:

A : Anton kommt

B : Berta kommt

C : Chris kommt

Zusammengesetzte Aussagen:

$$B \Rightarrow C$$

$$B \Leftrightarrow \neg C$$

$$A \Leftrightarrow C$$

Wir stellen eine Wahrheitstabelle auf.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$B \Leftrightarrow \neg C$	$A \Leftrightarrow C$
~~w~~	~~w~~	~~w~~	w	f	w
~~w~~	~~w~~	~~f~~	f	w	f
w	f	w	w	w	w
~~w~~	~~f~~	~~f~~	w	f	f
~~f~~	~~w~~	~~w~~	w	f	f
~~f~~	~~w~~	~~f~~	f	w	w
~~f~~	~~f~~	~~w~~	w	w	f
~~f~~	~~f~~	~~f~~	w	f	w

nur eine Möglichkeit bleibt

die f's führen zu falschen Aussagen

Lösung: Anton und Chris kommen, Berta nicht.

Aufgabe 2

a)

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w	f
f	w	w	f	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w

beide Wahrheitsverläufe stimmen überein, d.h.

$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Beispiel:

Das Dreieck abc ist rechtwinklig *oder* gleichschenklig.

Das Dreieck abc ist nicht rechtw. *und* nicht gleichsch.

6)

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
w	w	w	f	f	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	w

stimmen überein

Beispiel: Sei x eine reelle Zahl.

$$\underbrace{x = 2}_{A} \Rightarrow \underbrace{x^2 = 4}_{B}$$

$$\underbrace{x^2 \neq 4}_{\neg B} \Rightarrow \underbrace{x \neq 2}_{\neg A}$$

Aufgabe 3:

a)

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Wahrheitsverläufe stimmen überein

b)

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	w	w	w
w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	f	f	w	f	f
f	f	w	f	f	f	w	f
f	f	f	f	f	f	f	f

Wahrheitsverlauf stimmt überein

c) $\underbrace{\left[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)\right]}_{\text{linke Seite}} \Leftrightarrow \underbrace{\left[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)\right]}_{\text{rechte Seite}}$

A	B	C	$A \Leftrightarrow B$	$B \Leftrightarrow C$	li. Seite	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$C \Rightarrow A$	re. Seite
w	w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	w	f	w	f
w	f	w	f	f	f	f	w	w	f
w	f	f	f	w	f	f	w	w	f
f	w	w	f	w	f	w	w	f	f
f	w	f	f	f	f	w	f	w	f
f	f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	f	w	w	w	w	w	w	w

Wahrheitsverlauf stimmt überein

Aufgabe 4

a) Damit $(A \Rightarrow B) \wedge A$ wahr ist, muss A wahr sein.
Damit $A \Rightarrow B$ auch wahr ist, muss B wahr sein.
Ansonsten ist die Aussage falsch.
Vermutung: Aussage entspricht $A \wedge B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge A$	$A \wedge B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	f
f	f	w	f	f

stimmt überein

Also gilt:

$$\left[(A \Rightarrow B) \wedge A\right] \Longleftrightarrow (A \wedge B)$$

b) Damit $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)$ wahr ist, muss A falsch sein.
Dann ist $A \Rightarrow B$ auch wahr.
Vermutung: Aussage entspricht $\neg A$.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)$	$\neg A$
w	w	w	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

stimmt überein

Also gilt:

$$\left[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A)\right] \Leftrightarrow \neg A$$

c) Damit $(A \Rightarrow B) \wedge B$ wahr ist, muss B wahr sein.

Dann ist $A \Rightarrow B$ auch wahr.

Vermutung: Aussage entspricht B.

	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge B$	B
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	f	f

stimmt überein

Also gilt:

$$\left[(A \Rightarrow B) \wedge B\right] \Leftrightarrow B$$

d) Damit $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)$ wahr ist, muss B falsch sein

Damit $A \Rightarrow B$ auch wahr ist, muss A falsch sein.

Ansonsten ist die Aussage falsch.

Vermutung: Aussage entspricht $\neg A \wedge \neg B$.

A	B	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B)$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	w	f	f
w	f	f	f	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

stimmt überein

Also gilt:

$$\left[(A \Rightarrow B) \wedge A\right] \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

Aufgabe 5

a) $A(x)$: x ist Brillenträger.
$B(x)$: x hat schwarze Haare.

Aussageformen

Aussage:

$\forall$ AM-Studierende x : $(A(x) \wedge B(x))$

Negation:

$\neg(\forall$ AM-Studierende x : $(A(x) \wedge B(x)))$

$\Longleftrightarrow \exists$ AM-Studierender x : $\neg(A(x) \wedge B(x))$

$\Longleftrightarrow \exists$ AM-Studierender x : $(\neg A(x) \vee \neg B(x))$

Das heißt also:

Es existiert (mindestens) ein Studierender, der kein Brillenträger ist oder keine schwarzen Haare hat.

b) $A(x)$: x stammt aus Mannheim.
$B(x)$: x stammt aus München.

Aussage:

$\exists$ Studierender x : $(A(x) \vee B(x))$

Negation:

$\forall$ Studierende x: $\left(\neg A(x) \wedge \neg B(x)\right)$

Alle Studierende stammen weder aus Mannheim noch aus München.

c) $A(a,b)$: $a<b$

$B(a,b)$: $a^2<b^2$

$\forall$ natürlichen Zahlen a,b: $\left(A(a,b) \Rightarrow B(a,b)\right)$

Negation:

$\exists$ natürliche Zahlen a,b: $\neg\left(A(a,b) \Rightarrow B(a,b)\right)$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ natürliche Zahlen a,b: $\underbrace{\left(A(a,b) \wedge \neg B(a,b)\right)}_{a<b \,\wedge\, a^2 \geq b^2}$

Es existieren natürliche Zahlen a,b mit $a<b$ und $a^2 \geq b^2$.

Aufgabe 6

a) 1. Nachts sind alle Katzen grau.
2. Nachts gibt es eine Katze, die nicht grau ist.
3. Nachts gibt es eine Katze, die grau ist.
4. Nacht sind alle Katzen nicht grau.

b) $\forall x : x \leq 1$

$\exists x \ \forall y : x + y \neq 1$

c) Zu jeder positiven Zahl ε existiert ein n_0, so dass für alle n größer gleich n gilt: $1/n < \varepsilon$.