Übungen zur Mathematik 1

Lösungen Blatt 3

Aufgabe 1

a) $\{M, I, S, P\}$

b) Name: Michael Felten, $\{M, i, c, h, a, e, l, F, t, n\}$

c) $\{3, 1, 2, 0, 7\} = \{0, 1, 2, 3, 7\}$

d) $\{a, u, g, e, n, o, h, r\}$

e) $\{b, l, e, i\} = \{l, e, i, b\}$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24 \text{ Möglichkeiten}$$

1 Mögl. für 4. Buchst.

2 Mögl. für 3. Buchst.

3 Mögl. für 2. Buchst.

4 Möglichkeiten für den 1. Buchstaben

Aufgabe 2

a) $\{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge (n \mid 30)\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

$\{n \mid n \in \mathbb{N}, n \mid 30\}$ andere Schreibweise

b) $\{n \mid n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$

c) $\{n \mid n \in \mathbb{N},\ 5 < n < 12\} = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

d) $\{41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71\}$

e) $\{41, 43, 47, 53, 61, 71\}$

Anmerkung: Das Polynom $p(n) = n^2 + n + 41$ liefert für $n = 0, 1, 2, \dots, 39$ Primzahlen. $p(40) = 1681 = 41^2$ ist hingegen keine Primzahl.

Aufgabe 3

a) Es ist $|\mathcal{P}(\{\underbrace{a, u, t, o}_{\text{4 Elemente}}\})| = 2^4 = 16$ und

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}(\{a,u,t,o\}) \\
&= \{\emptyset, && \rightarrow 1 \\
&\quad \{a\}, \{u\}, \{t\}, \{o\}, && \rightarrow 4 \\
&\quad \{a,u\}, \{a,t\}, \{a,o\}, \{u,t\}, \{u,o\}, \{t,o\}, && \rightarrow 6 \\
&\quad \{a,u,t\}, \{a,u,o\}, \{a,t,o\}, \{u,t,o\}, && \rightarrow 4 \\
&\quad \{a,u,t,o\}\}. && \rightarrow 1
\end{aligned}
$$

$16 = 2^4$ Teilmengen

b)
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{2, 4\}$

$D = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = A$

$A \setminus B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

$B \setminus A = \emptyset$

$A \cap C = \{2, 4\} = C$

$A \cap D = \{2, 4, 6, 8\}$

$C \setminus D = \emptyset$

$D \setminus C = \{6, 8, 10\}$

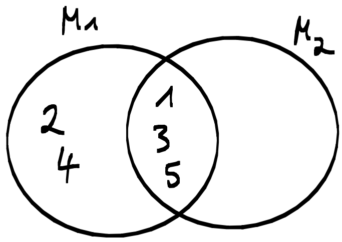
Aufgabe 4

a) $M_1 \cup M_2 = \{3,4,6,8,9,12\}$

$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = \{4,6\}$

$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 \setminus M_4 = \{4\}$

b)



Ergebnis: $M_1 = \{1,2,3,4,5\}$

$M_2 = \{1,3,5\}$

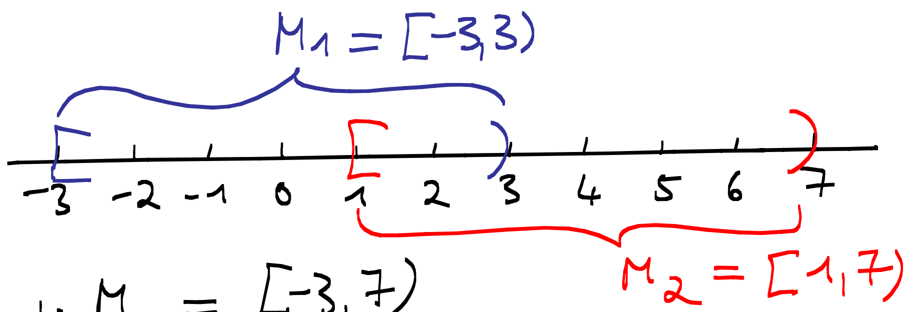
Probe: $M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\}$

$M_1 \cap M_2 = \{1,3,5\} = M_2$

$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}$

$M_2 \setminus M_1 = \emptyset$ da $M_2 \subset M_1$.

c)



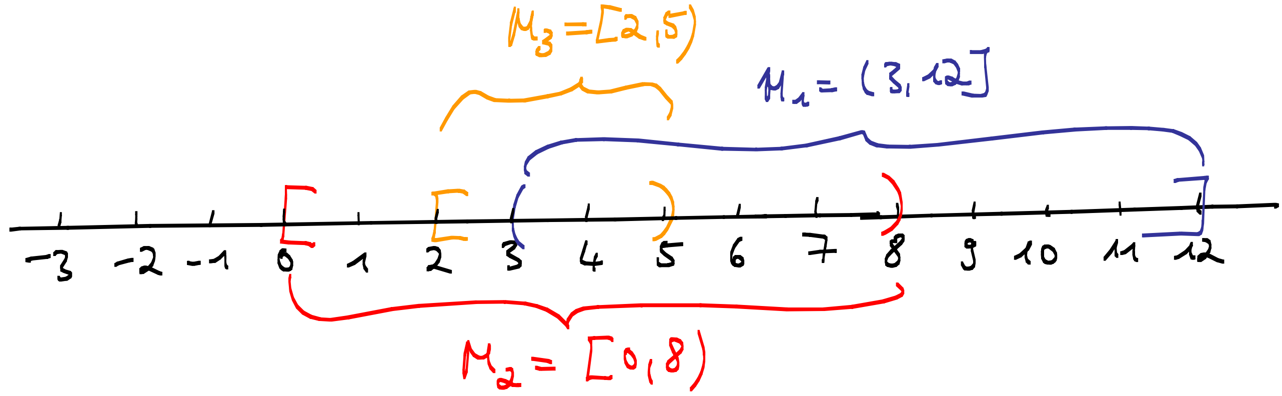
$M_1 \cup M_2 = [-3,7)$

$M_1 \cap M_2 = [1,3)$

$M_1 \setminus M_2 = [-3,1)$

$M_2 \setminus M_1 = [3,7)$

d)



$M_1 \cup M_2 = [0, 12]$

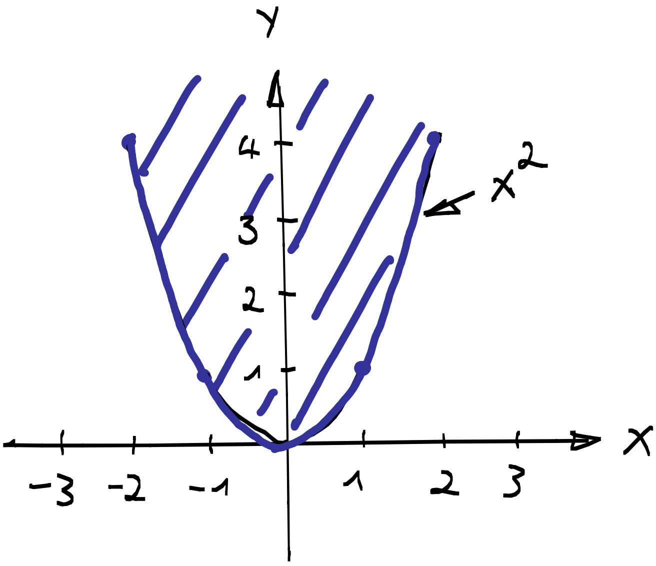
$M_1 \cap M_2 = (3, 8)$

$M_1 \setminus M_3 = [5, 12]$

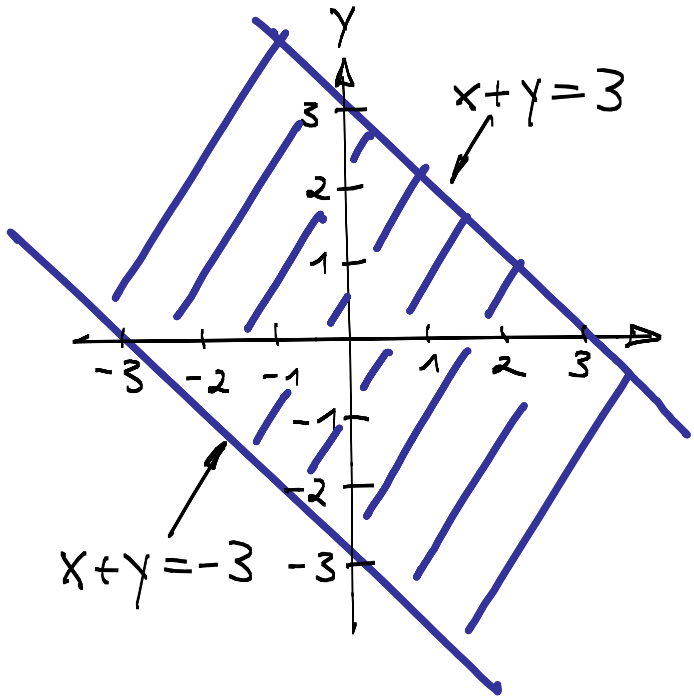
$M_1 \cup M_3 = [2, 12]$

Aufgabe 5

$\{(x,y) \mid y \geq x^2\}$



$\{(x,y) \mid x+y \leq 3 \wedge x+y \geq -3\}$



Aufgabe 6

a) falsch: $|A \times A| = |A| \cdot |A| = 120$, d.h.

$$|A|^2 = 120 \Rightarrow |A| = \sqrt{120} \notin \mathbb{N}.$$

b) wahr: Wähle Mengen A und B mit

$|A| = 1$ und $|B| = n$

$$\Rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B| = n.$$

c) wahr: $|A \times B| = 3 \cdot 6 = 18$

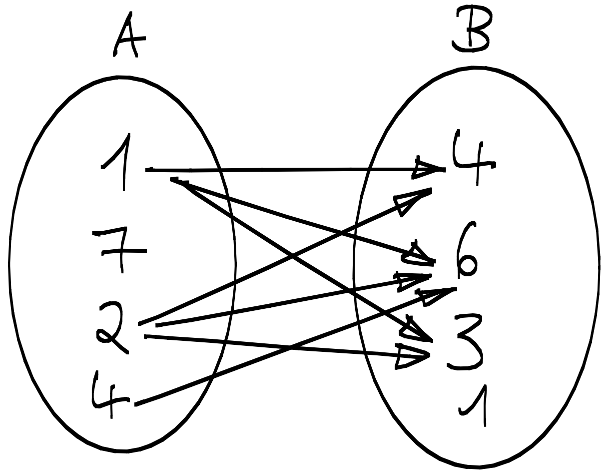
$$\Rightarrow |\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{18} = 262144.$$

Aufgabe 7

a) $A = \{1, 2, 4, 7\}$, $B = \{1, 3, 4, 6\}$

$(a,b) \in R \Leftrightarrow a < b$

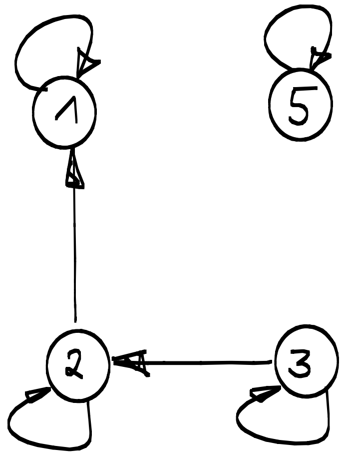
$R = \{(1,3), (1,4), (1,6), (2,3), (2,4), (2,6), (4,6)\}$



b) $A = \{1, 2, 3, 5\}$

$R_1 = \{ (x,y) \in A \times A \mid 0 \leq x - y \leq 1 \}$

$= \{ (1,1), (2,2), (3,3), (5,5), (2,1), (3,2) \}$



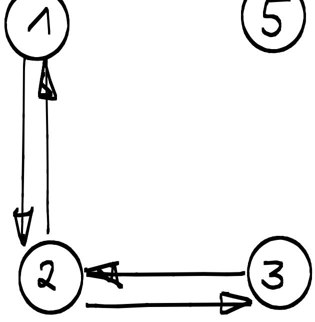
R_1 ist reflexiv: $(x,y) \in R_1$ für $x = 1,2,3,5$

R_1 ist nicht symmetrisch: $(2,1) \in R_1$ aber $(1,2) \notin R_1$

R_1 ist nicht transitiv: $(3,2), (2,1) \in R_1$ aber $(3,1) \notin R_1$

$R_2 = \{ (x,y) \in A \times A \mid (x-y)^2 = 1 \}$

$= \{ (1,2), (2,1), (3,2), (2,3) \}$



R_2 ist nicht reflexiv: $(1,1) \notin R_2$

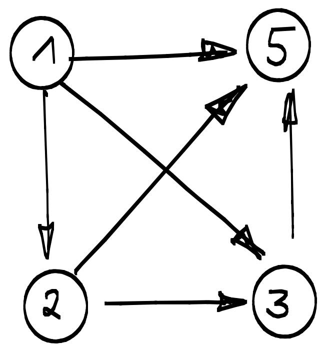
R_2 ist symmetrisch: $(x,y) \in R_2 \Rightarrow (y,x) \in R_2$

R_2 ist nicht transitiv: $(1,2),(2,3) \in R_2$

aber $(1,3) \notin R_2$

$R_3 = \{(x,y) \in A \times A \mid x < y\}$

$= \{(1,2),(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(3,5)\}$



R_3 ist nicht reflexiv: $(1,1) \notin R_3$

R_3 ist nicht symmetrisch: $(1,2) \in R_3$

aber $(2,1) \notin R_3$

R_3 ist transitiv:

$\underbrace{(x,y) \in R_3}_{x<y}, \underbrace{(y,z) \in R_3}_{y<z} \Rightarrow \underbrace{(x,z) \in R_3}_{x<z}$ ✓