Übungen zur Mathematik 1

Lösungen Blatt 4

Aufgabe 1

Seien $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Es gilt

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} .$$

Zu zeigen: $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation

1. $\sim$ ist reflexiv:

$$(a_1, a_2) \sim (a_1, a_2) \iff \underbrace{\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1}{a_2}}_{\text{erfüllt}}$$

2.) $\sim$ ist symmetrisch:

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} .$$

$$\iff \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\Rightarrow (b_1, b_2) \sim (a_1, a_2)$$

3.) $\sim$ ist transitiv:

Es gelte

$$\underbrace{(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)}_{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}} \text{ und } \underbrace{(b_1, b_2) \sim (c_1, c_2)}_{\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Longrightarrow \quad (a_1, a_2) \sim (c_1, c_2). \qquad \square$$

Welche Paare ganzer Zahlen bilden eine Äquivalenzklasse?

$$[(a_1, a_2)] = \left\{ (b_1, b_2) \;\middle|\; \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} \right\}$$

ist eine Äquivalenzklasse.

Äquivalent sind also solche Paare, deren Quotienten gleich sind. Die Klasse kann mit dem Bruch $\frac{a_1}{a_2}$ identifiziert werden.

$$[(1,3)] = \left\{ (a_1, a_2) \;\middle|\; \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3} \right\}$$

$$[(16,10)] = \left\{ (a_1, a_2) \;\middle|\; \frac{a_1}{a_2} = \underbrace{\frac{16}{10}}_{\frac{8}{5}} \right\} = [(8,5)]$$

$$[(-6,4)] = \left\{ (a_1, a_2) \;\middle|\; \frac{a_1}{a_2} = -\frac{3}{2} \right\}$$

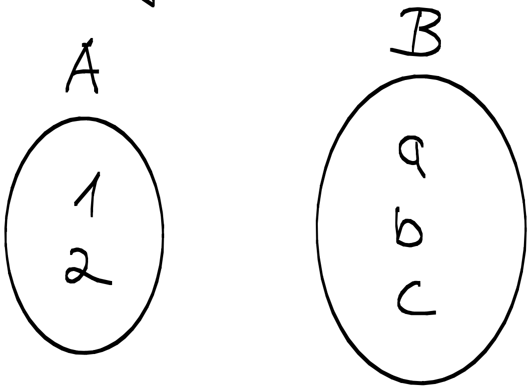
$$[(-22,-121)] = \left\{ (a_1, a_2) \;\middle|\; \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{11} \right\}$$

$$[(0,100)] = \left\{ (a_1, a_2) \;\middle|\; \underbrace{\frac{a_1}{a_2} = 0}_{\Longleftrightarrow\; a_1 = 0} \right\}$$

Aufgabe 2

a) $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$

$$f: A \to B$$

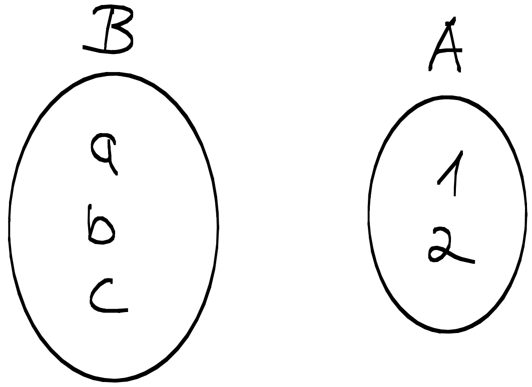


$f(1) \in \{a,b,c\}$ 3 Möglichkeiten

$f(2) \in \{a,b,c\}$ 3 Möglichkeiten

$\Longrightarrow$ insgesamt gibt es $3 \cdot 3 = 9$ Möglichkeiten für $f(1)$ und $f(2)$ Bildwerte zu wählen

$f: B \to A$



$f(a) \in \{1,2\}$ 2 Möglichkeiten

$f(b) \in \{1,2\}$ 2 Möglichkeiten

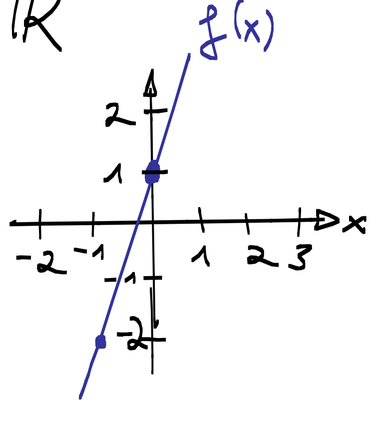
$f(c) \in \{1,2\}$ 2 Möglichkeiten

$\Rightarrow$ insgesamt gibt es $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten für $f(a), f(b)$ und $f(b)$ Bildwerte zu wählen.

Es gibt mehr Abbildungen $f: A \to B$ als $f: B \to A$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$

$f(\mathbb{R}) = \{ f(x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}$



$f(\mathbb{N}_0) = \{ f(n) \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$

$= \{ 3n+1 \mid n = 0, 1, 2, \dots \}$

$= \{ 1, 4, 7, \dots \} = B$

$$f([0,1]) = \{\underbrace{f(x)}_{3x+1} \mid x \in [0,1]\}$$

$$= [1,4]$$

$$f(\{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}) = \{\underbrace{f(3n+1)}_{3(3n+1)+1 \,=\, 9n+4} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$= \{9n+4 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$= \{4, 13, 22, \dots\}$$

$$f(\{3n+2 \mid n \in \mathbb{N}_0\}) = \{\underbrace{f(3n+2)}_{3(3n+2)+1 \,=\, 9n+7} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

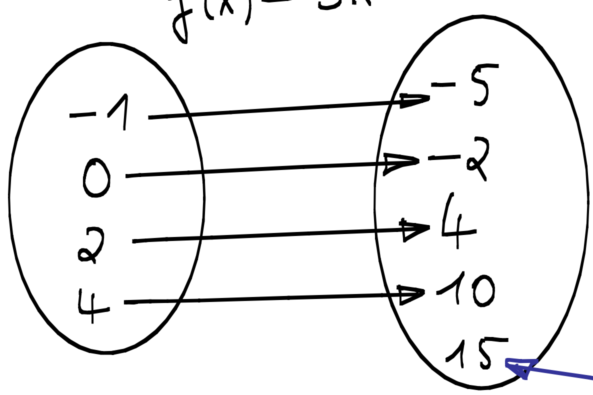
$$= \{9n+7 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$= \{7, 16, 25, \dots\}$$

Aufgabe 3

$f(x) = 3x-2$

a)



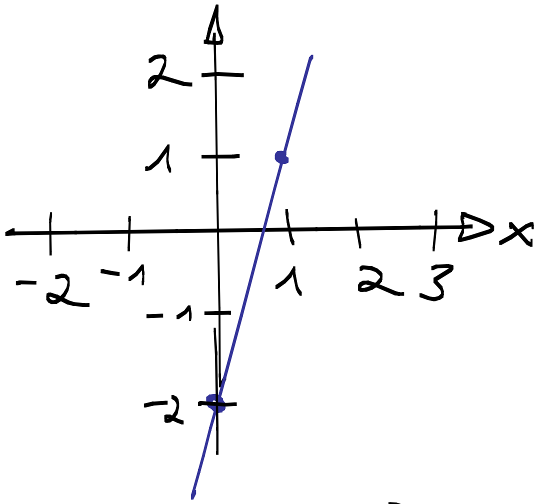
hat kein Urbild

f ist injektiv

f ist nicht surjektiv

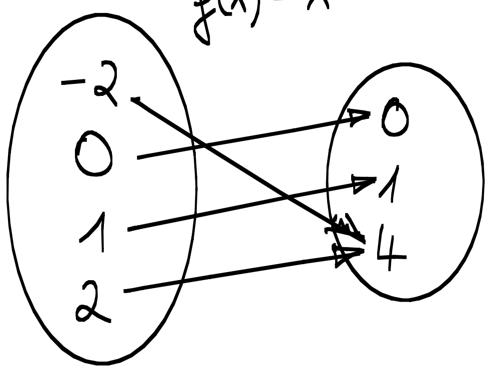
f ist nicht bijektiv

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 2$



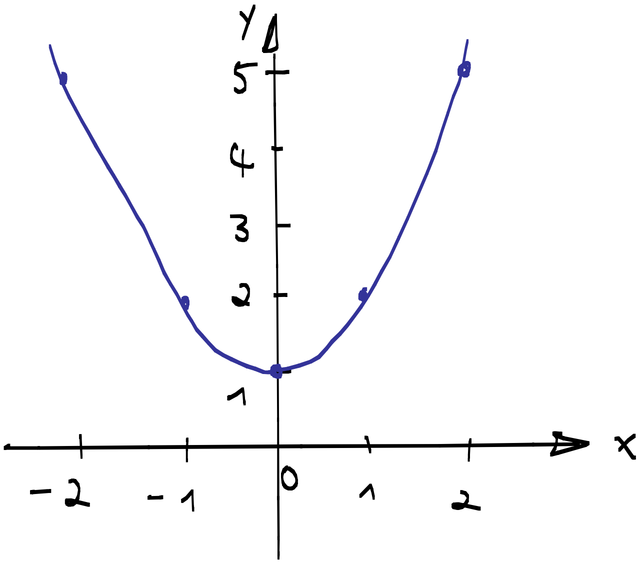
f ist injektiv
f ist surjektiv
f ist bijektiv

c) $f(x) = x^2$



f ist nicht injektiv
f ist surjektiv
f ist nicht bijektiv

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$



f ist nicht injektiv
f ist nicht surjektiv
f ist nicht bijektiv

Aufgabe 4

a) $\frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{3} + 1 - 4 - \frac{2}{3} = 0$

b) $10 + \frac{1}{5} - \frac{-1}{5} - 1 + \frac{9}{5} = 11\frac{1}{5}$

c) $5 + \frac{7}{12} + 1 + \frac{41}{72} + 2 + \frac{17}{24} + 9 + \frac{5}{9} = 17 + \frac{31}{24}$

$= 17 + \frac{42 + 41 + 51 + 40}{72} = 17 + \frac{174}{72}$

$= 19 + \frac{\cancel{30}^{\,5}}{\cancel{72}_{\,12}} = 19\frac{5}{12}$

d) $\frac{5 + 15 - 6}{18} + \frac{42 + 71}{81} = \frac{\cancel{14}^{\,7}}{\cancel{18}_{\,9}} + \frac{113}{81} = \frac{63 + 113}{81}$

$= \frac{176}{81} = 2\frac{14}{81}$

Aufgabe 5

a) $\frac{5c\,(7a - 10b)}{7a - 10b} = 5c$

b) $\frac{17x\,(2a + 3b - 7c)}{2a + 2b - 7c} = 17x$

c) $\frac{x\,(a+b) + y\,(a+b)}{a+b} = x + y$

d) $\frac{7b\,(13a+1) + 3a\,(13a+1)}{13a+1} = 7b + 3a$

Aufgabe 6

a) $\frac{1}{12}(2b+10c-2a-9a+21b-18c+16a-20b+28c)$

$= \frac{1}{12}(5a+3b+20c)$

b) $\frac{1}{96}(32b+6a+28a-32b+36c-27a-24b-36c)$

$= \frac{1}{96}(7a-24b)$

c) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b} = \frac{2b^2+2a^2-a^3-ab^2}{2ab}$

$= \frac{a^2(2-a)+b^2(2-a)}{2ab} = \frac{(a^2+b^2)(2-a)}{2ab}$

d) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{b^2}{a(a+b)}-\frac{a^2}{b(a+b)}$

$= \frac{b^2(a+\cancel{b})+a^2(\cancel{a}+b)-\cancel{b^3}-\cancel{a^3}}{ab(a+b)}$

$= \frac{ab^2+ba^2}{ab(a+b)} = \frac{\cancel{ab}\,\cancel{(b+a)}}{\cancel{ab}\,\cancel{(a+b)}} = 1$

e) $\frac{15a^2c+40b^2c-\cancel{12a^2b}+15a^2c+\cancel{12a^2b}-\cancel{15ab^2}+\cancel{15ab^2}-10b^2c}{30abc}$

$= \frac{30a^2c+30b^2c}{30abc} = \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

Aufgabe 7

a) $\dfrac{\cancel{5a}}{\underset{2}{\cancel{6b}}}\cdot\dfrac{\cancel{3b}}{\underset{2}{\cancel{10a}}} = \dfrac{1}{4}$

b) $\dfrac{\cancel{2}a^{2}\cancel{c}}{\cancel{3}b^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{\cancel{3b}}{\underset{2}{\cancel{4}}\cancel{a}\cancel{c}} = \dfrac{a}{2b}$

c) $\dfrac{8ab}{15cd} : \dfrac{4a}{5c} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{8}}\cancel{a}b}{\underset{3}{\cancel{15}}\cancel{c}d}\cdot\dfrac{\cancel{5}\cancel{c}}{\cancel{4a}} = \dfrac{2b}{3d}$

d) $a^2 + 9b^2$

e) $\dfrac{(3b+2a)(2a-3b)}{6ab} = \dfrac{\cancel{6ab} - 9b^2 + 4a^2 - \cancel{6ab}}{6ab}$

$= \dfrac{4a^2 - 9b^2}{6ab}$

f) $\dfrac{a^2 - 4b^2}{2ab}\cdot\dfrac{a+2b}{a} = \dfrac{(a^2-4b^2)(a+2b)}{2a^2b}$

g) $\left(\dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b^2}{a}\right) : \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{a^2+b^4}{ab^2} : \dfrac{b+a}{ab}$

$= \dfrac{a^2+b^4}{\cancel{a}b^{\cancel{2}}}\cdot\dfrac{\cancel{a}\cancel{b}}{a+b} = \dfrac{a^2+b^4}{b(a+b)}$

h) $\dfrac{a^2+b^2}{\cancel{ab}}\cdot\dfrac{\cancel{ab}}{a^2-b^2} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

i) $\dfrac{a^2-a}{a-1} = \dfrac{a\cancel{(a-1)}}{\cancel{a-1}} = a$

j) $$\frac{a(a+b)+b(a-b)}{a(a-b)-b(a+b)} = \frac{a^2+ab+ab-b^2}{a^2-ab-ab-b^2} = \frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-2ab-b^2}$$

k) $$\frac{b^3-a^3}{ab^3+a^2b^2+a^3b} = \frac{b^3-a^3}{\underbrace{ab\left(b^2+ab+a^2\right)}}$$

diesen Bruch kann man weiter vereinfachen, wenn man folgendes berücksichtigt:

$$(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right) = b^3 \cancel{+ab^2} \cancel{+a^2b} \cancel{-ab^2} \cancel{-a^2b} - a^3 = b^3-a^3$$

$$\frac{b^3-a^3}{ab\left(b^2+ab+a^2\right)} = \frac{(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right)}{ab\left(b^2+ab+a^2\right)} = \frac{b-a}{ab} = \underline{\underline{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}}.$$