

Übungen zur Mathematik 1

Lösungen Blatt 9

Aufgabe 1

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sum_{k=1}^5 \frac{k-1}{k+2} &= 0 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} = \frac{241}{140} \\
 \text{b) } \sum_{k=1}^4 (2k-5)^2 &= (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2 = 20 \\
 \text{c) } \sum_{k=1}^5 (2k+3-\frac{4}{k}) &= 2 \sum_{k=1}^5 k + 5 \cdot 3 - 4 \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} \\
 &= 2(1+2+3+4+5) + 15 - 4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}) \\
 &= 2 \cdot 15 + 15 - 4 \cdot \frac{137}{60} \\
 &= 45 - \frac{137}{15} \\
 &= \frac{538}{15} \\
 &= 35 \frac{13}{15}
 \end{aligned}$$

Im Folgenden fassen wir möglichst einfach zusammen.

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{30} (8-6k+2k-3-4+4k) = \sum_{k=1}^{30} 1 = 30$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \sum_{k=1}^{10} (k^2+2k-3+3k^2+5k+8-4k^2-6k+10) \\
 = \sum_{k=1}^{10} (k+15) = \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 15 \\
 = 55 + 10 \cdot 15 = 205
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \sum_{k=1}^{10} (1+2k+k^2 - (1-2k+k^2)) \\
 = \sum_{k=1}^{10} 4k = 4 \sum_{k=1}^{10} k = 4 \cdot 55 \\
 = 4 \cdot 55 = 220.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sum_{k=1}^7 2k \\
 \text{b) } \sum_{k=1}^8 (2k+1) \\
 \text{c) } \sum_{k=1}^9 (5+7 \cdot (k-1)) \\
 \text{d) } \sum_{k=1}^{10} \frac{k+1}{k} \\
 \text{e) } \sum_{k=1}^{11} (k^2+1)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \underline{1003} + 1020 + 1037 + \dots + 9979 + \underline{9996} \\
 & \text{59} \cdot 17 \quad \quad \quad \text{588} \cdot 17 \\
 & \text{kleinste Zahl} \quad \quad \quad \text{größte Zahl} \\
 & = \sum_{k=59}^{588} k \cdot 17 = 17 \cdot \sum_{k=59}^{588} k \quad \text{arithmetische Reihe} \\
 & = 17 \cdot \frac{(588-59) \cdot (59+588)}{2} \\
 & \quad \uparrow \\
 & \text{Formel aus Vorlesung: } \sum_{k=m}^n k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} \quad (*) \\
 & = 17 \cdot \frac{530 \cdot 647}{2} \\
 & = \underline{\underline{2.914.735}} \\
 \text{b) } \sum_{k=0}^{19} (90+k \cdot 9) &= \sum_{k=0}^{19} 90 + 9 \cdot \sum_{k=0}^{19} k \\
 & \stackrel{(*)}{=} 20 \cdot 90 + 9 \cdot \frac{20 \cdot (19+0)}{2} \\
 & \stackrel{\text{S.O.}}{=} 1800 + 90 \cdot 19 = \underline{\underline{3510}}.
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 1+3+3^2+\dots+3^{10} &= \sum_{k=0}^{10} 3^k = \frac{1-3^{11}}{1-3} \\
 &= \frac{3^{11}-1}{3-1} = \frac{1}{2} (3^{11}-1) = 88573 \\
 \text{b) } 1+2+2^2+\dots+2^n &= \sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \\
 &= \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1 \\
 \text{c) } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{128} &= \sum_{k=1}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^0 \\
 &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1-\frac{1}{256}}{\frac{1}{2}} - 1 \\
 &= 2 - \frac{1}{128} - 1 = 1 - \frac{1}{128} = \frac{127}{128} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \sum_{k=0}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^6 \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{128}
 \end{aligned}$$

Erinnerung:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{geometrische Reihe}$$

Aufgabe 5

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$$

$\frac{2}{3} < 1$

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \dots = \infty,$$

$\frac{3}{2} > 1$

$$\text{da } q = \frac{3}{2} > 1.$$

$$e) \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \dots$$

konvergiert nicht (divergent), da $|q| = |-2| > 1$.

Wert der Reihe existiert nicht.

Aufgabe 6

a) Einzahlung $E=3000$ jeweils zum Jahresbeginn
Verzinsung 6%

$$\text{Definiere } q = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$$

Kapital nach 1 Jahr: $E \cdot q$

" " 2 Jahren:

$$(E + E \cdot q) q = E q + E q^2$$

Kapital nach n Jahren:

$$E q + E q^2 + \dots + E q^n$$

$$= E q (1 + q + \dots + q^{n-1})$$

$$= E q \left(\sum_{k=0}^{n-1} q^k \right) \leftarrow \text{geometrische Reihe}$$

$$= E q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{Formel siehe oben}$$

Einsetzen von $n=10$ und $q = 1,06$

$$3000 \cdot 1,06 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} = \underline{\underline{41914,93}}$$

Nach 10 Jahren beträgt der Kontostand 41914,93€.

b) Der periodische Dezimalzahl $0,12\overline{34}$

steht als Abkürzung für

$$0,1234343434\dots \leftarrow \text{beliebig viele Blöcke 34}$$

Diese Zahl kann mit Hilfe einer geometrischen

Reihe dargestellt werden in der Form

$$0,12 + 0,0034 + 0,0034 \cdot \frac{1}{100} + 0,0034 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots$$

$$= 0,12 + \sum_{k=0}^{\infty} 0,0034 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^k$$

$$= 0,12 + 0,0034 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k \quad \text{geom. Reihe}$$

$$= 0,12 + 0,0034 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} \quad \leftarrow \text{Formel s.o.}$$

$$= 0,12 + 0,0034 \cdot \frac{100}{99}$$

$$= \frac{12}{100} + \frac{0,34}{99}$$

$$= \frac{12}{100} + \frac{34}{9900}$$

$$= \frac{12 \cdot 99 + 34}{9900}$$

$$= \frac{1220}{9900}$$

$$= \frac{611}{4950} \quad \leftarrow \text{Probe mit Taschenrechner:} \\ = 0,123434\dots$$

$$1,4\overline{56} = 1,4 + 0,056 \cdot \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \dots\right)$$

$$= \frac{14}{10} + 0,056 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{14}{10} + \frac{56}{990} = \underline{\underline{\frac{721}{495}}}$$

$$12,45\overline{678} = 12,45 + 0,00678 \cdot \left(1 + \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1000}\right)^2 + \dots\right)$$

$$= \frac{1245}{100} + 0,00678 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1000}}$$

$$= \frac{1245}{100} + \frac{678}{99900} = \underline{\underline{\frac{414811}{33300}}}$$

Aufgabe 7

$$a) \prod_{k=10}^{13} k = 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 = 17160$$

$$b) \prod_{k=1}^6 \frac{1}{k} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{720}$$

$$c) \prod_{k=1}^{15} \frac{k-1}{k^2+1} = 0 \quad \text{mit dem ersten Faktor verschwindet das Produkt}$$

$$d) \prod_{k=20}^{30} \frac{(k+1)(k-1)}{k^2-1} = \prod_{k=20}^{30} 1 = 1$$

$$e) \prod_{k=1}^{20} \frac{k}{k+2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{18}{20} \cdot \frac{19}{21} \cdot \frac{20}{22}$$

$$= \frac{2}{21 \cdot 22} = \frac{1}{231}$$

Aufgabe 8

$$a) \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$$

$$\binom{50}{3} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 19600$$

$$\binom{200}{4} = \frac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 64684950$$

$$b) \binom{11}{10} = \binom{11}{1} = 11$$

$$\binom{1000}{998} = \binom{1000}{2} = \frac{1000 \cdot 999}{1 \cdot 2} = 499500$$

$$c) (2a+3b)^4 = 16a^4 + \binom{4}{1} 8a^3b + \binom{4}{2} 4a^2b^2 + \binom{4}{3} 2a^2b^3 + 81b^4$$

$$= 16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 24ab^3 + 81b^4$$

$$d) (a+2)^5 - (a-2)^5$$

$$= \cancel{a^5} + \binom{5}{1} a^4 2 + \binom{5}{2} a^3 4 + \binom{5}{3} a^2 8 + \binom{5}{4} a \cdot 16 + 32$$

$$- (\cancel{a^5} - \binom{5}{1} a^4 2 + \binom{5}{2} a^3 4 - \binom{5}{3} a^2 8 + \binom{5}{4} a \cdot 16 - 32)$$

$$= 20a^4 + 160a^2 + 64$$

$$e) (a-1)^{30} = a^{30} + \binom{30}{1} a^{29} (-1) + \binom{30}{2} a^{28} (-1)^2 + \binom{30}{3} a^{27} (-1)^3 + \dots$$

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = 435 \quad \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$$

$$= a^{30} - 30a^{29} + 435a^{28} - 4060a^{27} + \dots$$