Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 1

Aufgabe 1: Welche der folgenden Sätze bzw. Zeichenketten sind Aussagen? Welche sind wahr, welche sind falsch?

a) 7 ist durch 2 teilbar.

b) Stuttgart liegt am Rhein.

c) Stuttgart hat viele Einwohner.

d) 2 teilt 12.

e) $2^6 - 1$ ist eine Primzahl.

f) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024$.

Aufgabe 2: Verneinen Sie die Aussagen. In welchen Fällen sind die Aussagen, in welchen die Negationen wahr?

A: 4 ist eine Primzahl oder eine Quadratzahl.

B: Es gibt keine geraden Primzahlen.

C: Von den Zahlen 1,2,3,4,5,6,7,8 ist weniger als die Hälfte gerade.

D: Jedes Rechteck ist auch ein Quadrat.

E: Ist ein Dreieck rechtwinklig, dann gilt der Satz von Pythagoras.

F: Die Winkelsumme im Viereck beträgt 360°.

Aufgabe 3: Stellen Sie den Wahrheitsverlauf der folgenden zusammengesetzten Aussagen in einer Wahrheitstabelle dar.

a) $(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$

b) $((\neg A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$

c) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow B$

d) $(A \wedge B) \wedge (\neg(A \Leftrightarrow B))$

e) $((A \wedge B) \vee C) \Rightarrow ((A \wedge C) \vee B)$

f) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \vee C)$

Welche dieser zusammengesetzten Aussagen sind stets wahr und welche stets falsch?

Aufgabe 4: "Worin besteht das Geheimnis Ihres langen Lebens?" wurde ein 100-jähriger gefragt. "Ich halte mich streng an die Diätregeln: Wenn ich kein Bier zu einer Mahlzeit trinke, dann habe ich immer Fisch. Immer wenn ich Fisch und Bier zur selben Mahlzeit trinke, dann verzichte ich auf Eiscreme. Wenn ich Eiscreme habe oder Bier meide, dann rühre ich Fisch nicht an."

Der Fragesteller fand diesen Ratschlag ziemlich verwirrend. Können Sie ihn vereinfachen? Gehen Sie folgendermaßen vor:

a) Formalisieren Sie die Aussagen des Greises.

b) Stellen Sie den Wahrheitsverlauf der zusammengesetzten Aussagen in einer Wahrheitstabelle dar.

c) Ermitteln Sie Wahrheitswerte für die Aussagen, unter denen die zusammengesetzten Aussagen wahr sind.

d) Ermitteln Sie eine Vereinfachung des Rats als Formel, und drücken Sie die einfachere Formel in natürlicher Sprache aus.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 2

Aufgabe 1: Sie haben Ihre drei Bekannten Anton, Berta und Chris zu sich eingeladen und wissen folgendes:

- Wenn Berta kommt, kommt auch Chris.
- Berta kommt genau dann, wenn Chris nicht kommt.
- Anton und Chris kommen, wenn überhaupt, dann nur zusammen.

Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, wer kommt.

Aufgabe 2: Zeigen Sie durch Aufstellen der Wahrheitstabellen, daß die folgenden Aussagenverknüpfungen logisch gleichwertig sind:

a) $\neg(A \vee B)$ und $(\neg A \wedge \neg B)$, De Morgansche Regel

b) $(A \Rightarrow B)$ und $(\neg B \Rightarrow \neg A)$. Kontraposition

Machen Sie sich klar, was Sie gezeigt haben, indem Sie für A und B konkrete Aussagen einsetzen.

Aufgabe 3: Beweisen Sie mittels Wahrheitstabellen die folgenden aussagelogischen Gesetze.

a) $A \wedge (B \vee C) \;\Leftrightarrow\; (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ Distributivgesetz

b) $A \vee (B \wedge C) \;\Leftrightarrow\; (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ Distributivgesetz

c) $\Big[(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)\Big] \;\Leftrightarrow\; \Big[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)\Big]$ Ringschlussregel

Aufgabe 4: Welche Aussage bzw. Aussageverknüpfung hat den gleichen Wahrheitsverlauf wie

a) $(A \Rightarrow B) \wedge A\,,$ b) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg A\,,$

c) $(A \Rightarrow B) \wedge B\,,$ d) $(A \Rightarrow B) \wedge \neg B$?

Versuchen Sie zunächst durch "logisches Überlegen", einen entsprechenden Ausdruck zu finden, und weisen Sie dann mit einer Wahrheitstabelle nach, dass dieser den gleichen Wahrheitsverlauf wie der gegebene hat.

Aufgabe 5: Verneinen Sie folgende Aussagen umgangssprachlich und formal mittels Aussageformen.

a) Alle AM-Studierenden sind Brillenträger und haben schwarze Haare.

b) Es gibt einen Studierenden, der aus Mannheim oder München stammt.

c) Für alle natürlichen Zahlen a, b gilt: Wenn $a < b$ ist, so ist $a^2 < b^2$.

Aufgabe 6:

a) Sei $A(x)$ die Aussageform "Nachts sind x Katzen grau." Formulieren Sie die folgenden Aussagen in natürlicher Sprache.

1. $\forall x : A(x)$ (Antwort: Nachts sind alle Katzen grau.)
2. $\exists x : \neg A(x)$
3. $\exists x : A(x)$
4. $\forall x : \neg A(x)$

b) Negieren Sie die Aussagen

$$\exists x : x > 1 \quad \text{bzw.} \quad \forall x\ \exists y : x + y = 1.$$

c) Formulieren Sie die Formel

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : 1/n < \varepsilon$$

in eigenen Worten aus.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 3

Aufgabe 1:

a) Geben Sie die Menge der Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI an.

b) Geben Sie die Menge der Buchstaben Ihres Namens an.

c) Geben Sie die Menge der Ziffern der Zahl 31122009 an.

d) Wie lautet die Vereinigungsmenge $\{a, u, g, e, n\} \cup \{o, h, r, e, n\}$?

e) Sind die Mengen $\{b, l, e, i\}$ und $\{l, e, i, b\}$ gleich? Wieviele Möglichkeiten gibt es, sie in dieser Form aufzuschreiben?

Aufgabe 2: Schreiben Sie die folgenden Mengen in beschreibender und in aufzählender Form.

a) Die Menge der Teiler von 30,

b) Die Menge der ungeraden Zahlen,

c) Die natürlichen Zahlen die größer als 5 und kleiner als 12 sind.

Stellen Sie die folgenden Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente dar.

d) $\{n \mid n \text{ ist Primzahl und } 41 \leq n \leq 71\}$,

e) $\{n^2 + n + 41 \mid n \in \mathbb{N}_0 \wedge n \leq 5\}$,

Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die Mächtigkeit der Potenzmenge von $M = \{a, u, t, o\}$ und geben Sie $\mathcal{P}(M)$ an.

b) Gegeben seien die Mengen

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$B = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \leq 4\},$$
$$C = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade und } n < 5\},$$
$$D = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ und } n \text{ gerade und } n \leq 11\}.$$

Bestimmen Sie $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap C$, $A \cap D$, $C \setminus D$, $D \setminus C$.

Aufgabe 4:

a) Es seien $M_1 = \{4, 8, 12\}$, $M_2 = \{3, 6, 9\}$, $M_3 = \{0, 2, 4, 6\}$ und $M_4 = \{6, 12, 18\}$. Bilden Sie: $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$.

b) Es sei $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M_1 \cap M_2 = \{1, 3, 5\}$, $M_1 \setminus M_2 = \{2, 4\}$ und $M_2 \setminus M_1 = \emptyset$. Bestimmen Sie M_1 und M_2.

c) Es sei $M_1 = [-3, 3)$ und $M_2 = [1, 7)$. Bestimmen Sie $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \setminus M_2$ und $M_2 \setminus M_1$.

d) Es sei $M_1 = (3, 12]$, $M_2 = [0, 8)$ und $M_3 = [2, 5)$. Bestimmen Sie $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_1 \setminus M_3$ und $M_1 \cup M_3$.

Aufgabe 5: Stellen Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ in einem kartesischen Koordinatensystem dar.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2\}$ b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 3 \land x + y \geq -3\}$

Aufgabe 6: Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Es gibt eine Menge A mit $|A \times A| = 120$.

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Mengen A und B, so dass $|A \times B| = n$ ist.

c) Sind A und B Mengen mit $|A| = 6$ und $|B| = 3$, so ist $|\mathcal{P}(A \times B)| = 262144$.

Aufgabe 7:

a) Geben Sie die Relation $R = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B,\ a < b\}$ zwischen den Mengen $A = \{1, 2, 4, 7\}$ und $B = \{1, 3, 4, 6\}$ explizit an, und stellen Sie R in einem Pfeildiagramm dar.

a) Es sei $A = \{1, 2, 3, 5\}$. Stellen Sie die Relationen

$$R_1 = \{(x, y) \mid x, y \in A,\ 0 \leq x - y \leq 1\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \mid x, y \in A,\ (x - y)^2 = 1\} \text{ und}$$
$$R_3 = \{(x, y) \mid x, y \in A,\ x < y\}$$

grafisch dar, und untersuchen Sie die Relationen auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 4

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \quad :\Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

eine Äquivalenzrelation definiert ist. Welche Paare ganzer Zahlen bilden eine Äquivalenzklasse? Geben Sie jeweils zu $(1, 3)$, $(16, 10)$, $(-6, 4)$, $(-22, -121)$ und $(0, 100)$ äquivalente Zahlenpaare an.

Aufgabe 2:

a) Es seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{a, b, c\}$. Wieviele Abbildungen $f: A \to B$ und wieviele Abbildungen $f: B \to A$ gibt es? In welchem Fall gibt es mehr Abbildungen?

b) Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $f(x) = 3x + 1$. Ferner seien $A = [0, 1]$, $B = \{3n + 1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ und $C = \{3n + 2 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Berechnen Sie $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{N}_0)$, $f(A)$, $f(B)$ und $f(C)$.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

a) $f: \{-1, 0, 2, 4\} \to \{-5, -2, 4, 10, 15\}$, $f(x) = 3x - 2$.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$.

c) $f: \{-2, 0, 1, 2\} \to \{0, 1, 4\}$, $f(x) = x^2$.

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 5

Aufgabe 1: Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

a) $\frac{1}{3} + 3\frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$ b) $10\frac{1}{5} - \frac{4-5}{5} - 5 \cdot \frac{1}{5} + \frac{10-1}{5}$

c) $5\frac{7}{12} + 1\frac{41}{72} + 2\frac{17}{24} + 9\frac{5}{9}$ d) $\frac{5}{18} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3} + \frac{14}{27} + \frac{71}{81}$

Aufgabe 2: Vereinfachen Sie folgende Brüche durch Kürzen.

a) $\frac{35ac - 50bc}{7a - 10b}$ b) $\frac{34ax + 51bx - 119cx}{2a + 3b - 7c}$

c) $\frac{ax + bx + ay + by}{a + b}$ d) $\frac{91ab + 7b + 39a^2 + 3a}{13a + 1}$

Aufgabe 3: Addieren Sie folgende Brüche.

a) $\frac{b + 5c - a}{6} - \frac{3a - 7b + 6c}{4} + \frac{4a - 5b + 7c}{3}$

b) $\frac{16b + 3a}{48} + \frac{7a - 8b + 9c}{24} - \frac{9a + 8b + 12c}{32}$

c) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{a^2 + b^2}{2b}$ d) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} - \frac{b^2}{a^2 + ab} - \frac{a^2}{ab + b^2}$

e) $\frac{3a^2 + 8b^2}{6ab} - \frac{a(4b - 5c)}{10bc} + \frac{4a - 5b}{10c} + \frac{b(3a - 2c)}{6ac}$

Aufgabe 4: Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

a) $\frac{5a}{6b} \cdot \frac{3b}{10a}$ b) $\frac{2a^2c}{3b^2} \cdot \frac{3b}{4ac}$

c) $\frac{8ab}{15cd} : \frac{4a}{5c}$ d) $\left(\frac{a}{3b} + \frac{3b}{a}\right) \cdot 3ab$

e) $\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b}\right) \cdot (2a - 3b)$ f) $\left(\frac{a}{2b} - \frac{2b}{a}\right) : \frac{a}{a + 2b}$

g) $\left(\frac{a}{b^2} + \frac{b^2}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ h) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$

i) $\dfrac{1 - \frac{1}{a}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}}$ j) $\dfrac{\frac{a}{a-b} + \frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b}}$

k) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$ (Tipp: $(b-a)(b^2+ab+a^2)=\ldots$)

Aufgabe 5: Lösen Sie folgende Klammern auf und fassen Sie zusammen.

a) $7a-3b+(-a+2c)-(3c-6b)-(6a-3c)$

b) $7a-[3a-(7+5b)]+[a-(4-6b)]-(2a+7b)$

c) $(-a)(b-a-c)$

d) $(a+b-c)(a-b-c)$

e) $(7a-5b)(3a+4b)-(5a-9b)(4a-b)$

f) $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$

Aufgabe 6: Zerlegen Sie die angegebenen Ausdrücke in Faktoren indem Sie gemeinsame Faktoren ausklammern. Vereinfachen Sie soweit wie möglich.

a) $a+a^2$

b) $8ab+20b^2$

c) $a^2b^2+ab+ab+1$

d) $3a+3-2a-2+4b(a+1)$

e) $3ac-3bc-2ad+2bd+4ac-4bc-7ad+7bd$

f) $15ab-5a-1+3b$

g) $(a^3-a^2)(2a-2a^2)$

h) $(-5a-10b)(-3a+6b)$

Aufgabe 7: Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie nach Möglichkeit.

a) $(-a+3b)^2$

b) $(-a-b)(a-b)$

c) $(4a^2-3)(4a^2+3)-(3a-4)^2+(5a+1)^2$

d) $(3a+2b-5c)^2$

e) $49a^2+42a+9$

f) $169a^2-130ab+25b^2$

g) $(8a-b)^2-16a^2$

h) $4a+12\sqrt{ab}+9b$

i) $(a+b+1)(a+b-1)$

j) $a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 6

Aufgabe 1: Führen Sie die schriftliche Division durch.

a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$

b) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$

c) $(a^3 + b^3) : (a + b)$

d) $(144a^4 - 81b^2) : (36a^2 + 27b)$

Aufgabe 2: Berechnen Sie

a) $\binom{20}{3}, \binom{50}{3}, \binom{200}{4},$

b) $\binom{11}{10}, \binom{1000}{998},$

c) $(2a + 3b)^4,$

d) $(a + 2)^5 - (a - 2)^5,$

e) die ersten vier Glieder von $(a - 1)^{30}$.

Aufgabe 3: Berechnen Sie:

a) $4^{-2} \cdot (\frac{1}{4})^{-4}$

b) $\sqrt[3]{-343}$

c) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$

d) $\sqrt[15]{20^{15}}$

e) $\sqrt[10]{3^{20}}$

f) $\sqrt[20]{2^{30}}$

g) $\sqrt[7]{10\,000\,000}$

h) $\sqrt[3]{0,125}$

Aufgabe 4: Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke.

a) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

b) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}$

d) $\sqrt{a\sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}$

e) $\sqrt[4]{9} \cdot (\sqrt[4]{3})^2$ f) $\sqrt{x \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[16]{x^5}}$

Aufgabe 5: Lösen Sie die Klammern auf:

a) $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[4]{b})^2$, b) $(2\sqrt{a} - 3\sqrt[3]{b}) \cdot (2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b})$, c) $(a^{1/3} + b^{1/3})^2$.

Beseitigen Sie die Wurzeln im Nenner durch geeignete Erweiterungen:

d) $\dfrac{u - 2v}{\sqrt{2u} - \sqrt{4v}}$, e) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2x^2} - \sqrt{by}}{\sqrt[3]{ax} + \sqrt[4]{by}}$.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 7

Aufgabe 1:

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene dar, und berechnen Sie die Beträge: $z_1 = 1 - i$ und $z_2 = 2(1 - \sqrt{3}i)$.

b) Addieren Sie rechnerisch und zeichnerisch: $(1 + 2i) + (2 + i)$ und $(1 - 2i) + (1 + 2i)$.

c) Es seien $z_1 = 5 + 3i$ und $z_2 = 5 - 3i$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$ und $|z_1|$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgende Ausdrücke, und stellen Sie diese in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

a)	$(5 + 2i)(3 + 4i)$	b)	$(2 + 3i)(4 - 5i)$
c)	$(1 + i\sqrt{2})^2$	d)	$(3 - i\sqrt{5})^2$
e)	$\dfrac{6 - 2i}{6 + 2i}$	f)	$\dfrac{56 + 33i}{12 - 5i}$
g)	$\dfrac{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}$	h)	$\dfrac{5i}{\sqrt{2} - i\sqrt{3}}$

Aufgabe 3: Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = 4 - 2i$.

a) Man berechne $z_1 \cdot z_2$ und $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ und vergleiche die Ergebnisse.

b) Man berechne $z_1 : z_2$ und $\bar{z}_1 : \bar{z}_2$ und vergleiche die Ergebnisse.

c) Vergleichen Sie die Beträge von z_1 und $\bar{z}_1$.

Aufgabe 4: Für $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 2 + 4i$, $z_3 = -3 - 6i$ sind die folgenden Terme

$$z_1 + z_2 z_3, \quad z_1^2 z_2, \quad \frac{z_1 z_2}{z_3}, \quad z_1 + \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} \quad \text{und} \quad \frac{z_2}{z_1 z_3}$$

zu berechnen.

Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 8

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie:

$$8 \operatorname{div} 5, \quad 8 \bmod 4, \quad 25 \operatorname{div} 4, \quad 25 \bmod 4, \quad 37 \operatorname{div} 11, \quad 37 \bmod 11,$$

$$50 \operatorname{div} 7, \quad 50 \bmod 7, \quad 1024 \operatorname{div} 23, \quad 1024 \bmod 23, \quad 24536 \operatorname{div} 256, \quad 24536 \bmod 256.$$

b) Führen Sie die folgenden Rechenoperationen jeweils in den Restklassen $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_8$ und $\mathbb{Z}_{11}$ durch.

$$2+2, \quad 2+3, \quad 3+4, \quad 5+3, \quad 11+25, \quad 20+30,$$

$$2\cdot 2, \quad 2\cdot 3, \quad 3\cdot 4, \quad 5\cdot 3, \quad 11\cdot 25, \quad 20\cdot 30,$$

$$2\cdot 2\cdot 2, \quad 2\cdot 3\cdot 4, \quad 4^3, \quad 5^3, \quad 11^{25}, \quad 20^{30}.$$

Aufgabe 2: Schreiben Sie die ersten zwölf Zeilen des Pascalschen Dreiecks auf, und markieren Sie alle Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$, für die n ein Teiler von $\binom{n}{k}$ ist. Was gilt, wenn n eine Primzahl ist?

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Potenzen x^p, $x \in \mathbb{Z}_p$, für $p = 7$ und $p = 11$. Schreiben Sie die Werte jeweils in eine Tabelle für $p = 7$ und $p = 11$ (vgl. Vorlesung). Wie lautet der Kleine Fermatsche Satz? Erklären Sie ihn anhand der beiden Tabellen.

Aufgabe 4: Berechnen Sie mit Hilfe des Kleinen Fermatschen Satzes folgende Potenzen:

$$4^7 \bmod 7, \quad 6^7 \bmod 7, \quad 9^{11} \bmod 11, \quad 8^{13} \bmod 13, \quad 5^{28} \bmod 29, \quad 27^{80} \bmod 79.$$

Aufgabe 5:

a) Verschlüsseln Sie das Wort HDM (ASCII: 72, 68, 77) mit dem RSA-Verfahren und dem öffentlichen Schlüssel $(n, e) = (187, 7)$.

b) Entschlüsseln Sie das Ergebnis von a) mit dem geheimen Schlüssel $d = 23$.

c) Finden Sie die beiden Primfaktoren p und q mit $n = p \cdot q$, und zeigen Sie, dass die Bedingung $e \cdot d = 1 \bmod (p-1)(q-1)$ erfüllt ist.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 9

Aufgabe 1: Berechnen Sie die ersten sechs Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} \quad \text{und} \quad a_1 = 1,\ a_2 = 3.$$

Welche explizite Darstellung hat die Folge?

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit und Monotonie. Dabei ist

$$\text{a)} \quad x_n = \frac{1-n+n^2}{n+1}, \qquad \text{b)} \quad x_n = \frac{1-n+n^2}{n(n+1)},$$

$$\text{c)} \quad x_n = \frac{1}{1+(-2)^n}, \qquad \text{d)} \quad x_n = \sqrt{1+\frac{n+1}{n}}.$$

Tipp: Um die Beschränktheit zu zeigen, vereinfachen Sie die Ausdrücke und verwenden Sie geeignete Abschätzungen. Für die Monotoniebetrachtungen bestimmen Sie die Differenz aufeinanderfolgender Glieder.

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die Folgen (a_n), (b_n), (c_n) und (d_n) mit den unten angegebenen Gliedern auf Konvergenz.

$$a_n = \frac{n^2}{n^3-2}, \qquad b_n = \frac{n^3-2}{n^2},$$

$$c_n = n-1, \qquad d_n = b_n - c_n.$$

Aufgabe 4: Berechnen Sie jeweils den Grenzwert der Folge (x_n), falls dieser existiert.

$$\text{a)} \quad x_n = \frac{2n^2-4n+8}{n^2+5n+10}, \qquad \text{b)} \quad x_n = \frac{5n^3+4n^2-8n+15}{8n^3-2n^2+4n-9},$$

$$\text{c)} \quad x_n = \frac{n^2+2n+6}{n+7}, \qquad \text{d)} \quad x_n = \frac{1-n+n^2}{n(n+1)},$$

$$\text{e)} \quad x_n = \frac{n^3-1}{n^2+3} - \frac{n^3(n-2)}{n^2+1}, \qquad \text{f)} \quad x_n = \frac{\sqrt{3n}+9}{\sqrt{10n}-4}.$$

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 10

Aufgabe 1: Berechnen Sie

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{k+2}$, b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (2k-5)^2$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \left(2k+3-\frac{4}{k}\right)$.

Berechnen Sie möglichst einfach

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} (8-6k) + \sum_{k=1}^{30} (2k-3) - \sum_{k=1}^{30} (4-4k)$,

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (k^2+2k-3) + \sum_{k=1}^{10} (3k^2+5k+8) - \sum_{k=1}^{10} (4k^2+6k-10)$,

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (1+k)^2 - \sum_{k=1}^{10} (1-k)^2$.

Aufgabe 2: Schreiben Sie folgende Summen unter Verwendung des Summenzeichens auf.

a) $2+4+6+8+10+12+14$,

b) $3+5+7+9+11+13+15+17$,

c) $5+12+19+26+33+40+47+54+61$,

d) $\displaystyle\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\frac{8}{7}+\frac{9}{8}+\frac{10}{9}+\frac{11}{10}$,

e) $2+5+10+17+26+37+50+65+82+101+122$.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie die Summe aller vierstelligen natürlichen Zahlen, die durch 17 teilbar sind.

b) In einem Hörsaal umfasst die unterste Reihe 90 Sitzplätze. In jeder nachfolgenden Reihe befinden sich 9 Sitzplätze mehr. Insgesamt gibt es 20 Reihen. Bestimmen Sie die Anzahl aller Sitzplätze.

Aufgabe 4: Berechnen Sie

a) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{10}$,

b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n$,

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{128}$.

Aufgabe 5: Berechnen Sie im Falle der Existenz den Wert der geometrischen Reihen.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^k$, b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{3})^k$, c) $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{3}{2})^k$, e) $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k$.

Aufgabe 6: Verwenden Sie geometrische Reihen für die folgenden Berechnungen.

a) Auf ein Konto werden jährlich 3000 Euro eingezahlt. Die Verzinsung erfolge jährlich zu 6% mit Zinseszins. Berechnen Sie den Kontostand nach 10 Jahren.

b) Wandeln Sie die periodischen Dezimalzahlen

$$0,12\overline{34}, \quad 1,4\overline{56} \quad \text{und} \quad 12,45\overline{678}$$

in Brüche um.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 11

Aufgabe 1:

a) Ein Studierender der Hochschule wird von einem Besucher nach seinem Alter gefragt. Scherzhaft antwortet er: "Mein Vater ist zweieinhalb mal so alt wie ich. Zusammen sind wir zwei Jahre jünger als mein neunundsiebzigjähriger Opa." Wie alt sind Vater und Sohn?

b) Die Summe aus dem Fünffachen einer Zahl und 3 ist doppelt so groß wie die Differenz aus dem Dreifachen dieser Zahl und 1. Wie heißt diese Zahl?

c) Die Summe aus dem Quadrat einer positiven Zahl und ihrem Dreizehnfachen ergibt 888. Wie heißt die Zahl?

Aufgabe 2: Lösen Sie folgende Gleichungen nach x auf.

a) $5x - 2 = 2x + 10$	b) $24 - 7x = 3$
c) $7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 5$	d) $100 + 2x - 9x + 15 = 10 - 7x + 5 - 11x$
e) $3(x - 6) + 8x(x - 2) = 8x(x + 1)$	f) $ax + b^2 = a^2 - bx \qquad (a + b \neq 0)$

Aufgabe 3: Lösen Sie folgende Gleichungen mittels quadratischer Ergänzung und p,q-Formel.

a) $x^2 + 2x = 63$	b) $x^2 - 8x + 15 = 0$
c) $x^2 + 6x = 91$	d) $x^2 - 40x + 111 = 0$

Aufgabe 4: Wie lauten die beiden komplexen Lösungen $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$ der Gleichung $x^2 - 10x + 32 = 0$?

Aufgabe 5: Lösen Sie die beiden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens.

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 6 \\ 3x - 2y - 4z &= 3 \\ 2x + y + 3z &= 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 3x - 4y + 5z &= 4 \\ -x + y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7: Führen Sie die folgenden Matrix-Vektor-Multiplikationen aus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8: Berechnen Sie die Matrizenprodukte $A \cdot A$, $B \cdot B$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass im Allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$ ist.

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 12

Aufgabe 1: Gegeben seien folgende lineare Funktionen.

$$f_1(x) = 2x + 1, \qquad f_2(x) = x - 2,$$
$$f_3(x) = \tfrac{1}{3}(5 - 2x), \qquad f_4(x) = \tfrac{1}{5}(2x - 15).$$

a) Stellen Sie die Funktionen für den Bereich $-5 \leq x \leq 5$ in einem Koordinatensystem grafisch dar. Geben Sie jeweils den Schnittpunkt mit der y-Achse und die Steigung der Geraden an.

b) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen.

c) Berechnen Sie *alle* sechs Schnittpunkte (jeweils zweier Geraden).

Aufgabe 2: Die Flugbahn eines Geschosses lautet

$$y = -\frac{1}{58}(x^2 - 100x - 416)$$

($x = 0$ Abschussort, x, y in Meter). Bestimmen Sie die Flugweite W und die Steighöhe (maximale Höhe) H.

Tipp: Berechnen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Funktion.

Aufgabe 3: Stellen Sie die in der Exponentialform vorliegenden komplexen Zahlen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar. Verwenden Sie ggfs. einen Taschenrechner.

a) $2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $3\,e^{\frac{3}{4}\pi i}$ c) $5\,e^{\pi i}$ d) $3\,e^{\frac{25}{36}2\pi i}$ e) $4\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

f) $4\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ g) $e^{1024i+5}$ h) $e^{(1+i)(2-i)}$ i) $e^{\frac{1}{(1+i)}}$ j) $e^{(1+i)^4}$

Aufgabe 4: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke. Geben Sie die Ergebnisse in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

a) $[2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3}))]^{10}$ b) $[5(\cos(-\frac{\pi}{18}) + i \cdot \sin(-\frac{\pi}{18}))]^4$

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 13

Aufgabe 1: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen nach der *Potenzregel.*

a) $4x^5$ b) $2 \cdot x^{a+1}$ c) $\sqrt[4]{x^3}$

d) $\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$ e) $\sqrt[3]{x^4}$ f) $x^{1/2}$

Aufgabe 2: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen nach der *Summenregel.*

a) $-10x^4 + 2x^3 - 2$ b) $a \cdot \cos x - x^2 + e^x + 1$

c) $\dfrac{10}{x^3} - 3\ln x + \tan x$ d) $4 \cdot \sqrt[3]{x^5} - 4 \cdot e^x + \sin x$

Aufgabe 3: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen nach der *Produktregel.*

a) $(4x^3 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 5)$

b) $\tan^2 x$ c) $\sin x \cdot \cos x$ d) $(3x + 5x^2 - 1)^2$

e) $2x \cdot \ln x$ f) $e^x \cdot \cos x$ g) $x^n \cdot e^x$

h) $\ln x \cdot \cosh x$ i) $x^2 \cdot \arcsin x$ j) $2x \cdot e^x \cdot \cos x$

Aufgabe 4: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen nach der *Quotientenregel.*

a) $\dfrac{5x^5 - 6x^2 + 1}{x^2 + 2x + 1}$ b) $\dfrac{10x}{x^2 + 1}$ c) $\dfrac{\ln x}{x^2}$

d) $\dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{x^3 - 5x}$ e) $e^{-x} \cdot \ln x$ f) $\dfrac{x^{1/2} - x^2}{x^2 + 1}$

g) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ h) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$ i) $\dfrac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$

Aufgabe 5: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen nach der *Kettenregel.*

a)	$5(4x^3 - x^2 + 1)^5$	b)	$\dfrac{10}{x^3 - 2x + 5}$
c)	$\sin(x + 2)$	d)	$2 \cdot \cos(10x - \pi/3)$
e)	$3 \cdot e^{-4x}$	f)	$\sin^2(2x - 4)$
g)	$2 \cdot \ln(x^3 - 2x)$	h)	e^{x^2-2x+5}
i)	$\arccos \sqrt{x^2 - 1}$	j)	$\arctan(x^2 + 1)$
k)	$\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 10)^2}$	l)	$(x^3 - 4x + 5)^{-5/3}$

Aufgabe 6:

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2x^3$, streng monoton wachsend ist.

b) Berechnen Sie, ohne die Umkehrfunktion f^{-1} explizit anzugeben, $(f^{-1})'(0)$ und $(f^{-1})'(3)$ unter Verwendung der Ableitungsregel der Umkehrfunktion.

Aufgabe 7: Wo besitzen die folgenden Funktionen lokale Minima bzw. lokale Maxima? Welche Funktionswerte werden dort angenommen?

a) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$

b) $g(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

c) $h(x) = x \cdot e^{-x}$

Aufgabe 8: Betrachten Sie die Funktion $f(x) = (x - 1) \cdot e^{-2x}$.

a) Berechnen Sie die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extremwerte von f.

c) Wo besitzt die Funktion f einen Wendepunkt?

Aufgabe 9: Das Fenster eines Hörsaals soll die Form eines Rechteckes mit aufgesetztem Halbkreis haben. Welche Abmessungen muss das Fenster erhalten, damit bei einem vorgegebenen Umfang von 10 m die Fensterfläche maximal wird?

Hochschule der Medien Prof. Dr. Michael Felten

Übungen zur Mathematik 1

Blatt 14

Aufgabe 1: Bestimmen Sie *sämtliche* Stammfunktionen zu

a) $4x^5 - 6x^3 + 8x^2 - 3x + 5$

b) $3 \cdot \sin x - 4 \cdot \cos x$

c) $2 \cdot e^x - \dfrac{5}{x} + 1$

d) $\dfrac{1 - 2x^2 - 4x^3}{2x}$

e) $\dfrac{5}{3 + 3x^2} - \dfrac{1}{4}x^4$

f) $\dfrac{-2}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $2 \cdot \sin x - \dfrac{6}{x} + 7x^2$

h) $-3 \cdot e^x - \cos x$

Aufgabe 2: Lösen Sie die nachstehenden unbestimmten Integrale.

a) $\int (e^x - x^2 - 2x + \sin x)\, dx$

b) $\displaystyle\int \left(e^x - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

c) $\int (2x - 3)^2\, dx$

d) $\displaystyle\int \left(-\frac{3}{1 + x^2} - \frac{1}{x}\right) dx$

e) $\displaystyle\int \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

f) $\displaystyle\int \left(5 \cdot e^x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^5} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[5]{x^4}}\, dx$

h) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x}}\, dx$

Aufgabe 3: Lösen Sie die folgenden Integrale durch *partielle Integration*.

a) $\displaystyle\int x \cdot \ln x\, dx$

b) $\displaystyle\int x \cdot \cos x\, dx$

c) $\displaystyle\int_1^5 \ln x\, dx$

d) $\displaystyle\int x \cdot \sin(3x)\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{0.8} x \cdot e^x\, dx$

f) $\displaystyle\int \arctan x\, dx$

Aufgabe 4: Lösen Sie die Integrale

$$\text{a)} \quad \int e^x \cdot \cos x \, dx \qquad\qquad \text{b)} \quad \int x^2 \cdot e^{-x} \, dx$$

durch *zweimalige partielle Integration.*

Aufgabe 5: Lösen Sie die folgenden Integrale unter Verwendung einer *geeigneten Substitution.*

$$\text{a)} \quad \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} \, dx \qquad \text{b)} \quad \int (5x+12)^{1/2} \, dx$$

$$\text{c)} \quad \int \sqrt[3]{1-x} \, dx \qquad \text{d)} \quad \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x \, dx$$

$$\text{e)} \quad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx \qquad \text{f)} \quad \int \frac{2x+6}{x^2+6x-12} \, dx$$

$$\text{g)} \quad \int \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx \qquad \text{h)} \quad \int x \cdot \sin(x^2) \, dx$$

Aufgabe 6: Welchen Wert besitzen die folgenden bestimmten Integrale?

$$\text{a)} \quad \int_0^4 (x^3 - 5x^2 - 1.5x - 10) \, dx \qquad \text{b)} \quad \int_1^e \frac{1}{x} \, dx$$

$$\text{c)} \quad \int_0^{\pi} (a \cdot \sin x - b \cdot \cos x) \, dx \qquad \text{d)} \quad \int_1^4 \frac{1-x^2}{x} \, dx$$

$$\text{e)} \quad \int_1^2 5 \cdot \sqrt{x} \, dx \qquad \text{f)} \quad \int_{\pi}^2 \cos x \, dx$$

Aufgabe 7:

a) Welchen Flächeninhalt schließt der Funktionsgraf von $f(x) = -\frac{1}{4}\,x^2 + 4$ mit der x-Achse ein?

b) Berechnen Sie die im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ unter der Kosinuskurve liegende Fläche.

c) Berechnen Sie die Fläche zwischen der Parabel $f(x) = -3(x-2)^2 + 5$ und der x-Achse.