# Umkehrfunktion

**Definition:** Es sei $f: D \to W$ eine Funktion. Eine Funktion $f^{-1}: W \to D$ heißt Umkehrfunktion von $f$, wenn $\underbrace{(f^{-1} \circ f)(x)}_{f^{-1}(f(x))} = x$ für alle $x \in D$ gilt.

ACHTUNG: $f^{-1}(y)$ nicht mit $(f(y))^{-1} = \frac{1}{f(y)}$ verwechseln!

Löst man $y = f(x)$ nach $x$ auf, so erhält man $f^{-1}(y) = x$.

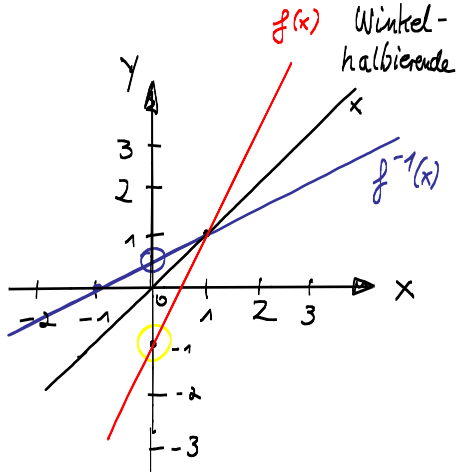
**Beispiel:**

$f(x) = 2x - 1$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}$

$= x$




Grafen von $f$ und $f^{-1}$ liegen spiegelbildlich zur Winkelhalbierenden.

Berechnung:

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \Leftrightarrow \quad 2x - 1 &= y \\ \Leftrightarrow \quad 2x &= y + 1 \\ \Leftrightarrow \quad x &= \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2} = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

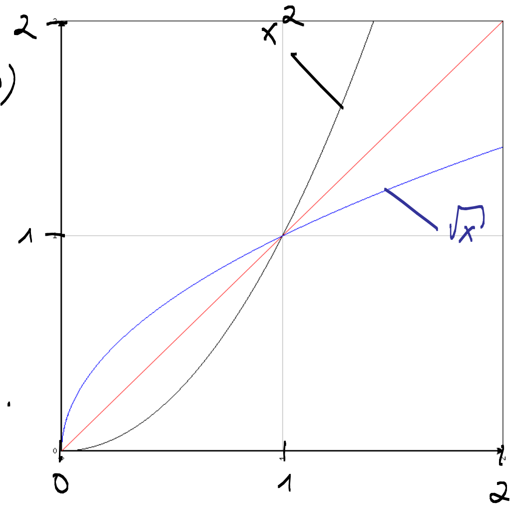
**Beispiel:**

$f(x) = x^2$, $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

Umkehrfunktion nur definiert für $x \geq 0$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x$ für $x \geq 0$.



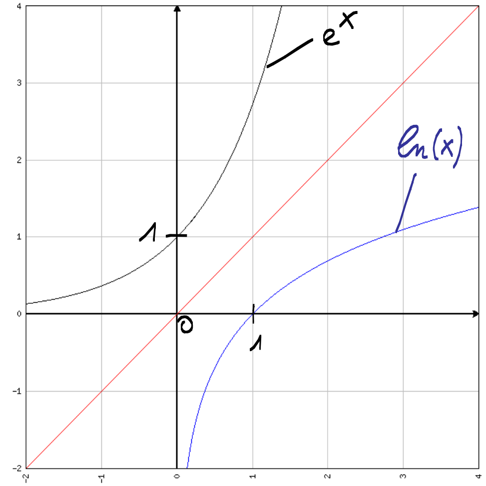

**Beispiel:**

$f(x) = e^x$, $f: \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$f^{-1}(x) = \ln(x)$, $x > 0$

natürlicher Logarithmus nur definiert für $x > 0$

$f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$




Weitere Beispiele:

$f_1(x) = \sin(x)$, $f_1: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, $f_1^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$f_2(x) = \cos(x)$, $f_2: [0,\pi] \to [-1,1]$, $f_2^{-1}(x) = \arccos(x)$

$f_3(x) = \tan(x)$, $f_3: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $f_3^{-1}(x) = \arctan(x)$

$f_4(x) = \cot(x)$, $f_4: (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $f_4^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x)$