Übungen zur Mathematik 2

Lösungen Blatt 1

Aufgabe 1

Wir benötigen die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 4x + 24.$$

$x_1 = 2 \Rightarrow f(x_1) = 0$ (durch Probieren)

Polynomdivision:

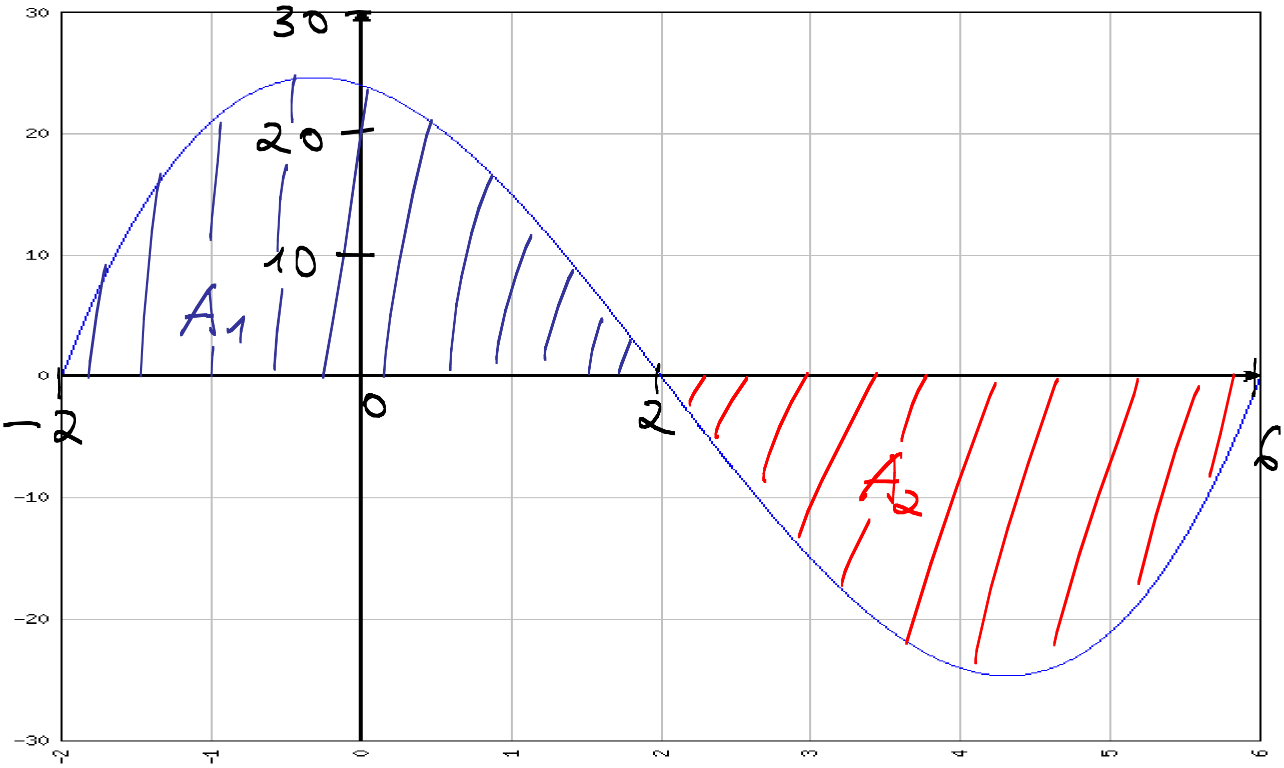
$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 6x^2 - 4x + 24) : (x - 2) = x^2 - 4x - 12 \\
-(x^2 - 2x^2) \\
\hline
\quad -4x^2 - 4x \\
\quad -(-4x^2 + 8x) \\
\hline
\qquad -12x + 24 \\
\qquad -(-12x + 24) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$x^2 - 4x - 12 = 0, \quad p = -4, \; q = -12$

p,q-Formel: $x_2 = 2 - \sqrt{4 + 12} = -2$

$x_3 = 2 + \sqrt{4 + 12} = 6$

Nullstellen: $x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ x_3 = 6$



Stammfunktion:

$$\int \left(x^3 - 6x^2 - 4x + 24\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x + C$$

$$A_1 = \int_{-2}^{2} \left(x^3 - 6x^2 - 4x + 24\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x\right]_{-2}^{2}$$

$$= (4 - 16 - 8 + 48) - (4 + 16 - 8 - 48)$$

$$= 28 + 36$$

$$= 64$$

$$A_2 = - \int_2^6 (x^3 - 6x^2 - 4x + 24)\,dx$$

$$= - \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 24x\right]_2^6$$

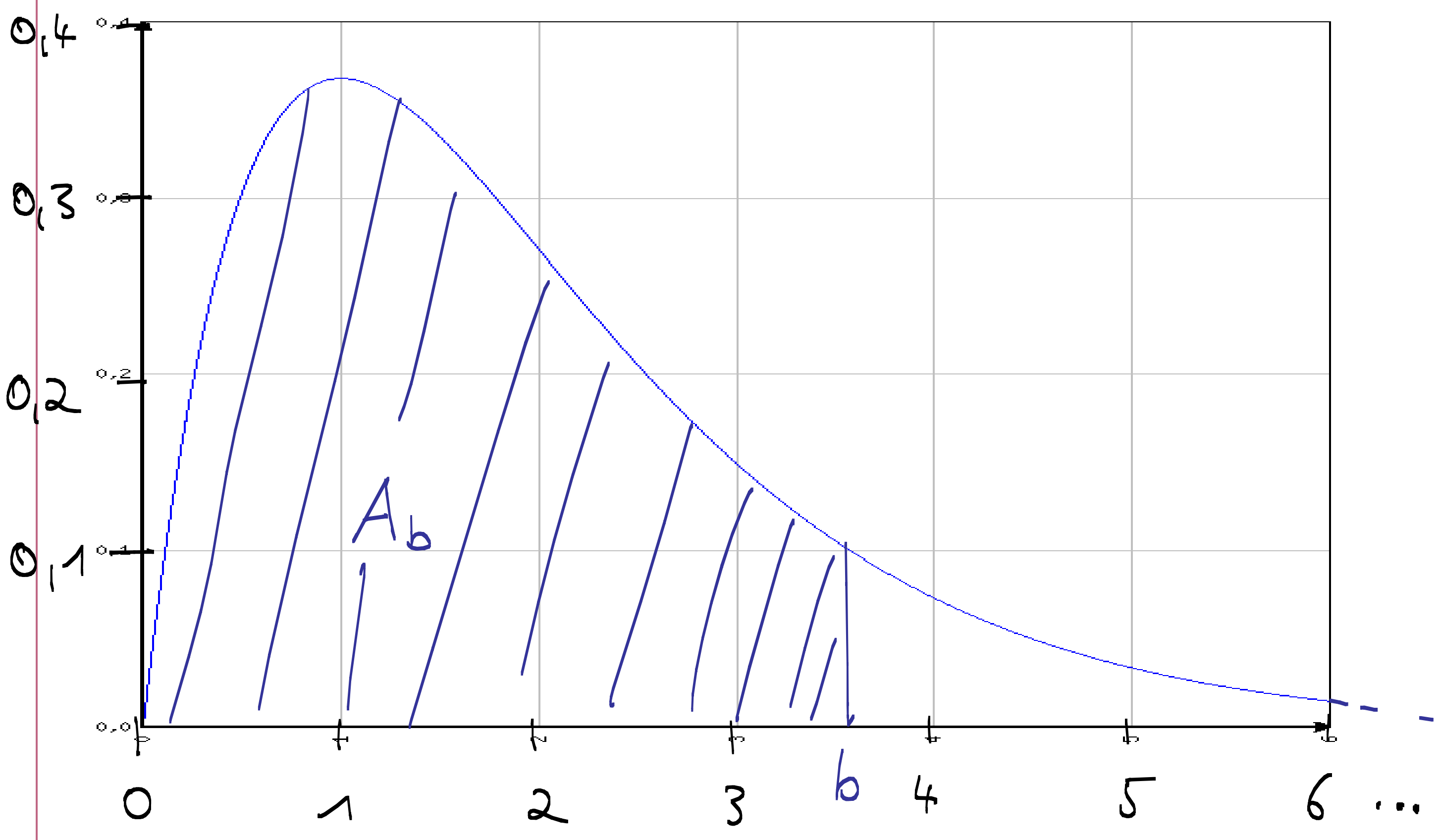
$$= -(324 - 432 - 72 + 144 - 4 + 16 + 8 - 48)$$

$$= 64$$

Gesamtfläche $A = A_1 + A_2 = 64 + 64 = \underline{\underline{128}}$

Aufgabe 2 $f(x) = x e^{-x}, \quad x \geq 0.$

a)



b)

Stammfunktion

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'} \, dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{v} \, dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$= (-x-1) e^{-x} + C$$

Flächeninhalt

$$A_b = \int_0^b x e^{-x} \, dx = \left[(-x-1) e^{-x} \right]_0^b$$

$$= (-b-1) e^{-b} + 1$$

$$= 1 - (b+1) e^{-b}$$

c) Für $b \to \infty$ konvergiert e^{-b} gegen 0.

$\Longrightarrow A_b \to 1$ für $b \to \infty$

der Flächeninhalt beträgt 1 auf dem Intervall $[0, \infty)$,

d.h. $$\int_0^\infty x e^{-x} \, dx = 1.$$

Aufgabe 3

a) Kurvenschnittpunkte:

$$\sin(x) = \cos(x)$$

ist für $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{5}{4}\pi$ erfüllt.

Es gilt

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Der gesuchte Flächeninhalt F wird über folgendes Integral berechnet:

$$F = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin(x) - \cos(x))\,dx$$

$$= \Big[-\cos(x) - \sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$= \underbrace{-\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \underbrace{\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \left(-\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{2\cdot\sqrt{2}}} = 2{,}828\ldots$$

b) $f(x) = 4a - \frac{x^2}{a}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} = 4a$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2a$$

$$g(x) = \frac{3}{a}(x-2a)^2$$ Scheitelpunktsform

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 4a - \frac{x^2}{a} = \frac{3}{a}(x-2a)^2$$

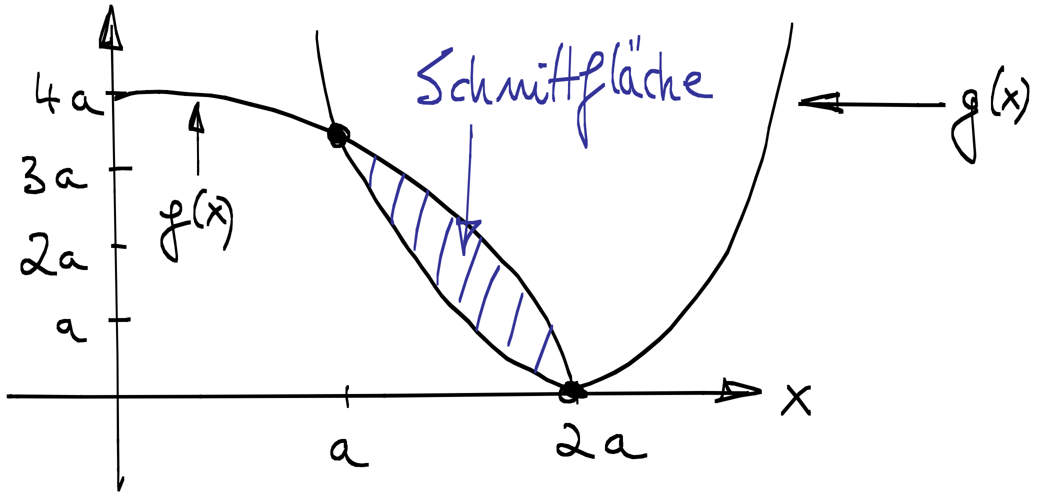
$$\Leftrightarrow 4a^2 - x^2 = 3x^2 - 12ax + 12a^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 12ax + 8a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$$

p,q-Formel $\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}a \pm \sqrt{\underbrace{\frac{9}{4}a^2 - \frac{8}{4}a^2}_{\frac{a^2}{4}}}$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2a \vee x = a}}$$



$$F = \int_a^{2a} \left(4a - \frac{x^2}{a} - \frac{3}{a}(x-2a)^2\right) dx$$

$$= \left[4ax - \frac{x^3}{3a} - \frac{1}{a}(x-2a)^3\right]_a^{2a}$$

$$= 8a^2 - \frac{8a^{\cancel{3}2}}{3\cancel{a}} - 0 - \left(4a^2 - \frac{a^{\cancel{3}2}}{3\cancel{a}} - \underbrace{\frac{1}{a}(-a)^3}_{-a^2}\right)$$

$$= \left(8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} - 1\right) a^2$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3} a^2}}$$